

ISSN 2312-0975

Пилотный выпуск 2015 год



ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА



МФЮА



НАУКА

МОСКВА

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Том 1 № 1 2015

**МОСКОВСКИЙ ФИНАНСОВО-ЮРИДИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ МФЮА
ВЫСШАЯ ШКОЛА НАУКИ**

Журнал “Прикладная математика и математическая физика” осуществляет свою деятельность под руководством Высшей школы науки при Московском финансово-юридическом университете МФЮА.

“Прикладная математика и математическая физика” является рецензируемым научным журналом с международным составом редакционной коллегии. Журнал публикует оригинальные статьи высокого уровня в различных областях фундаментальной и прикладной математики, вычислительной математики и математической физики.

Журнал выпускает один том в год, и каждый том состоит из двух номеров. Язык публикаций – русский, английский или французский; заглавие, фамилия и аннотация приводятся на английском и русском языках.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Том 1 № 1 2015

Журнал основан в 2013 году, выходит 2 раза в год

ГЛАВНЫЕ РЕДАКТОРЫ: **В. В. Жиков** (Россия), **Р. Наталини** (Италия)
ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА: **О. А. Матевосян** (Россия, Франция)
ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ: **М. Д. Сурначёв** (Россия)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Ю. А. Алхутов (Россия), **Т. М. Атанакович** (Сербия),
А. Ю. Байков (Россия), **Ф. Баттести** (Франция), **Х. Бегер** (Германия),
В. И. Богачев (Россия), **В. И. Буренков** (Россия), **В. Б. Васильев** (Россия),
В. А. Вестяк (Россия), **В. И. Власов** (Россия),
Д. В. Георгиевский (Россия), **А. Дамламян** (Франция),
Г. В. Демиденко (Россия), **А. Аро** (Франция), **А. Н. Карапетянц** (Россия),
М. И. Караханян (Армения), **А. А. Коньков** (Россия),
Ж. Р. Леметр (Франция), **Дж. Нордо** (Италия), **Е. Ю. Панов** (Россия),
А. В. Покровский (Украина), **А. Л. Пятницкий** (Норвегия, Россия),
О. С. Розанова (Россия), **А. П. Сейранян** (Россия),
В. Р. Хачатуров (Россия), **Т. Хориучи** (Япония),
В. В. Чепыжов (Россия), **М. В. Шамолин** (Россия),
Т. А. Шапошникова (Россия), **А. А. Шкаликов** (Россия)

РЕДАКЦИОННЫЙ ДИРЕКТОР: **С. А. Забелина** (Россия)

Applied Mathematics & *Mathematical Physics*

Volume 1 Number 1 2015

The journal **Applied Mathematics and Mathematical Physics** (Прикладная математика и математическая физика) was founded in 2013 and is published quarterly by the Graduate School of Science at Moscow University of Finance and Law MFUA. It covers a wide range of Pure and Applied Mathematics. Research articles in the journal are selected by the Editorial Board with the aid of distinguished international referees and according to high standards.

EDITORS-IN-CHIEF: **V. V. Zhikov** (Russia), **R. Natalini** (Italy)
DEPUTY EDITOR-IN-CHIEF: **H. A. Matevossian** (France, Russia)
EXECUTIVE SECRETARY: **M. D. Surnachev** (Russia)

EDITORIAL BOARD:

Yu. A. Alkhutov (Russia), **T. M. Atanackovic** (Serbia),
A. Yu. Baikov (Russia), **F. Battesti** (France), **H. Begehr** (Germany),
V. I. Bogachev (Russia), **V. I. Burenkov** (Russia),
V. V. Chepyzhov (Russia), **A. Damlamian** (France),
G. V. Demidenko (Russia), **D. V. Georgievskii** (Russia),
A. Haraux (France), **T. Horiuchi** (Japan), **M. I. Karakhanyan** (Armenia),
A. N. Karapetyants (Russia), **V. R. Khachaturov** (Russia),
A. A. Kon'kov (Russia), **G. R. Lemaître** (France), **G. Nardo** (Italy),
E. Yu. Panov (Russia), **A. L. Piatnitski** (Norway, Russia),
A. V. Pokrovskii (Ukraine), **O. S. Rozanova** (Russia),
A. P. Seyranian (Russia), **M. V. Shamolin** (Russia),
T. A. Shaposhnikova (Russia), **A. A. Shkalikov** (Russia),
V. B. Vasilyev (Russia), **V. A. Vestyak** (Russia), **V. I. Vlasov** (Russia)

EDITORIAL DIRECTOR: **S. A. Zabelina** (Russia)



УДК 517.95+517.983

Псевдодифференциальные уравнения, сингулярные интегралы и распределения

В. Б. ВАСИЛЬЕВ

Аннотация. Рассматриваются некоторые обобщенные функции, связанные с каноническими особенностями, играющими важную роль в теории псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с негладким краем. Они представляют собой ядра сингулярных интегральных операторов, обратимость которых гарантирует фредгольмовость рассматриваемой краевой задачи. Исследуется случай, когда особенность вырождается, превращаясь в многообразие меньшей размерности, и делается попытка описать соответствующие обобщенные функции.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, обобщенная функция, сингулярный интеграл.

1. Введение

Теория псевдодифференциальных операторов возникла относительно недавно [1]–[9], и ее основные достижения приходятся на 60–70-е годы прошлого столетия. Главные достижения в “псевдодифференциальной теории” заключаются в построении символического исчисления псевдодифференциальных операторов и краевых задач для псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с гладким краем. Существует много различных точек зрения на проблему построения аналогичной теории для многообразий с негладким краем, однако автор предложил и вновь предлагает свою точку зрения (пока для эллиптических уравнений), связанную с понятием волновой факторизации символа [10], [11]. Начало подобным исследованиям положила работа В. А. Кондратьева [12], в которой детально изучена общая краевая задача для дифференциального оператора в конусе. Кстати, В. А. Кондратьев на вопрос автора, что сейчас происходит в теории краевых задач в областях с негладкой границей (декабрь 2004 г.), ответил одним очень емким словом¹, и это побудило автора собрать свои уже имеющиеся наброски в какой-то единый, но пока незавершенный фрагмент. Это побуждение (хотя оно логически вытекает из того, что уже сделано в [10], [13]) тем более усилилось, когда автор уточнил, что Б. Ю. Стернин [14] – это первый ученик В. А. Кондратьева, заинтересовавшийся построением теории краевых задач для дифференциальных операторов на

¹По В. Пикую, это слово (“ничего”) приказал выгравировать на своем перстне Отто фон Бисмарк, покидая Россию.

многообразиях, граница которых содержит подмногообразия меньшей размерности. Автор надеется, что ему удастся в перспективе получить “негладкий” аналог предложенной Б. Ю. Стерниным теории с привлечением волновой факторизации.

В работах [10], [11] автор определил интегральный оператор, связанный с конусом, в терминах которого в ряде случаев можно было выписать решение простейшего псевдодифференциального уравнения в так называемой “модельной” области. Этот оператор представлял собой граничное значение интегрального оператора Бохнера [15], [16] теории функций многих комплексных переменных и, по мнению автора, очень удачное многомерное обобщение интеграла типа Коши или преобразования Гильберта [17]. Он также связан с некоторой краевой задачей линейного сопряжения для функций многих переменных, отличной от той, которую рассматривал в 1960-е годы В. С. Владимиров [18], [19]. Отличие, в первую очередь, заключалось в том, что в постановке В. С. Владимирова в многомерном комплексном пространстве оставался определенный “вакуум”, в котором не задавались и не разыскивались никакие функции. Разумеется, были и другие постановки многомерных краевых задач типа задачи Римана [20]–[22] и какие-то случаи их разрешимости, но ни в одной из этих работ не намечено никаких связей с псевдодифференциальными уравнениями. Исследования автора в этом направлении частично отражены в монографиях [10], [13]. Здесь мне хотелось бы остановиться на самом интегральном операторе и его дальнейшем применении для более сложных особенностей, нежели “конус” и “ребро”, которые были рассмотрены ранее.

2. Двумерный случай

Рассмотрим двумерную область типа внешности пика (рис. 1) с нулевым углом заострения, так что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ непрерывно дифференцируемы на

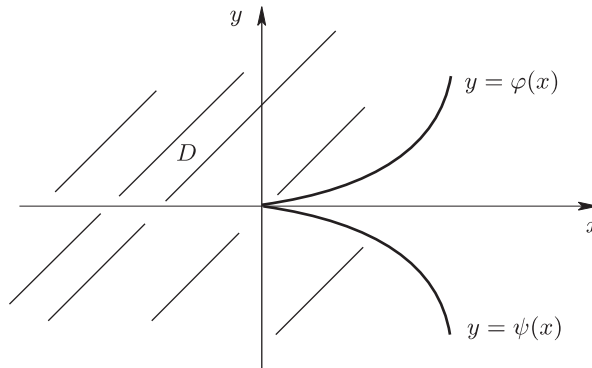


Рис. 1

$[0, +\infty)$ и $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$. Очевидно, такая область будет диффеоморфна в области $\mathbb{R}^2 \setminus [0, +\infty)$. Действительно, диффеоморфизм окрестности нуля можно определить формулами

$$\xi = x, \quad \eta = y - \varphi(x)$$

для точек I четверти и формулами

$$\xi = x, \quad \eta = y - \psi(x)$$

для точек IV четверти, а точки II и III четвертей оставить на месте. Якобиан такого преобразования будет иметь вид

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi'(x) & 1 \end{vmatrix} & \text{в I четверти,} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\psi'(x) & 1 \end{vmatrix} & \text{в IV четверти,} \\ 1 & \text{во II и III четвертях.} \end{cases}$$

В окрестности нуля этот якобиан непрерывен, и в нуле он равен 1.

Предположим, что в окрестности нуля мы перешли к координатам (ξ, η) . Это означает, что сингулярный интегральный оператор

$$u(x) \mapsto \int_D K(x, x - y)u(y) dy$$

с ядром Кальдерона–Зигмунда $K(x, y)$ квазиэквивалентен [4], [10] оператору

$$u(x) \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} K(0, \xi - \eta)u(\eta) d\eta.$$

Поскольку для обратимости последнего оператора кроме эллиптичности не требуется ничего (если мы рассматриваем пространство суммируемых функций, например $L^2(\mathbb{R}^2)$), можно заключить, что вопрос об условиях нётеровости оператора решен. Действуя аналогично [11], можно убедиться в том, что при выполнении условия эллиптичности индекс такого оператора равен нулю.

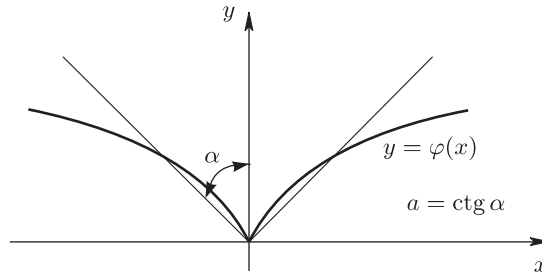


Рис. 2

Если рассматривать область с особенностью типа внутренности пика (рис. 2), то, очевидно, предыдущие соображения неприменимы, поэтому здесь предлагается использовать “асимптотические” идеи. Указанную особенность можно трактовать как предельное положение конуса, когда его раствор стремится к нулю. Результаты, связанные с этим подходом, предлагаются в настоящей работе.

Рассмотрим двумерный случай. Задача заключается в выяснении того, что представляет собой в образах Фурье оператор умножения на характеристическую функцию, например, положительной части оси y . Аналитическая запись этого мультипликатора следующая:

$$m(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, y > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Априори ясно, что такой мультипликатор в образах Фурье – это свертка с обобщенной функцией, причем однородной степени -2 , коль скоро функция $m(x, y)$ однородна степени нуль (см. [3], [4], [23], [24]), и, следовательно, ее можно считать определенной на единичной окружности, которую упомянутая полуось прокалывает в единственной точке – “северном полюсе”. Прием применяется стандартный: мультипликатор “размазывается” по углу раствора α , находится соответствующая обобщенная функция (вообще-то, она уже найдена; см. ядра Бохнера, например, в [11], [15], [16]), а затем проводится переход к пределу при $\alpha \rightarrow 0$.

Замечание 1. В работе автора [11] был введен оператор Гахова, который определялся с выходом в комплексную плоскость. Конечно, было бы желательно дать определение в действительных переменных, и для этого придется вырезать особенность специальным образом. Так, при двумерном преобразовании Гильберта особенность вырезается “крестом”. В случае двумерного оператора Гахова, вероятно, это надо делать с помощью каких-то “гиперболических” вырезов. Мы не будем останавливаться на этом вопросе (оператор Гахова непрерывно действует в L_2 -пространствах²).

Угол раствора α – это множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y > a|x|\}$, $a = \operatorname{ctg} \alpha$, и, таким образом, нужная асимптотика $\alpha \rightarrow 0$ соответствует $a \rightarrow \infty$. Обобщенная функция, соответствующая угловому мультипликатору, – это функция

$$\frac{1}{2} \delta(\xi) + K_a(\xi_1, \xi_2), \quad K_a(\xi_1, \xi_2) = \frac{a}{2\pi^2} \frac{1}{\xi_1^2 - a^2(\xi_2 + i0)^2}, \quad (1)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\delta(\xi)$ – дельта-функция Дирака.

Остается найти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{2\pi^2} \frac{1}{\xi_1^2 - a^2\xi_2^2}$$

(записываем так для краткости, однако не следует забывать, что последняя переменная является комплексной) в смысле обобщенных функций. Пусть $\varphi(\xi) \in S(\mathbb{R}^2)$ (класс Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций), и тогда

$$\frac{a}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(\xi_1, \xi_2)}{\xi_1^2 - a^2\xi_2^2} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(\xi_1, t/a)}{\xi_1^2 - t^2} d\xi_1 dt.$$

²Может быть, Н. Касумов разберется в этом вопросе, поскольку он имеет некоторый опыт [25].

Переходя к пределу, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(\xi_1, t/a)}{\xi_1^2 - t^2} d\xi_1 dt &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(\xi_1, 0)}{\xi_1^2 - t^2} d\xi_1 dt \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi_1, 0) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\xi_1^2 - t^2} \right) d\xi_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Вычислим внутренний интеграл. Подынтегральная функция четная, и, следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\xi_1^2 - t^2} &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\xi_1^2 - t^2} = \frac{1}{\xi_1} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\xi_1 - t} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\xi_1 + t} \right) \\ &= \frac{1}{\xi_1} \ln \frac{\xi_1 + t}{\xi_1 - t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\xi_1} \ln(-1) = \frac{\pi i}{\xi_1}. \end{aligned}$$

Учитывая это в (2), получаем

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(\xi_1, \xi_2)}{\xi_1^2 - a^2 \xi_2^2} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi_1, 0)}{\xi_1} d\xi_1. \quad (3)$$

Соотношение (3) для обобщенных функций означает, что справедлива

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{2\pi^2} \frac{1}{\xi_1^2 - a^2 \xi_2^2} = \frac{i}{2\pi} \mathbb{P} \frac{1}{\xi_1} \otimes \delta(\xi_2), \quad (4)$$

где обозначение функционала \mathbb{P} заимствовано из [26], [27], $a \otimes$ – прямое произведение обобщенных функций. (Значение функционала $\mathbb{P} \frac{1}{x}$ определяется формулой

$$\left(\mathbb{P} \frac{1}{x}, \varphi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

на основной функции одной переменной $\varphi(x)$.)

Итак, обобщенная функция (4) соответствует полубесконечной трещине (разумеется, с дельта-добавкой). Найдем другую асимптотику функции (1) при $a \rightarrow 0$. Получаемая обобщенная функция должна соответствовать полуплоскости (вместо “точки” на единичной окружности – “верхняя полуокружность”); этот результат уже известен [2]. Нетрудно сообразить, что, положив $b = 1/a$, вопрос можно свести к следующему вычислению:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(t/b, \xi_2)}{t^2 - \xi_2^2} dt d\xi_2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(0, \xi_2) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - \xi_2^2} \right) d\xi_2,$$

или, в обобщенных функциях:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{2\pi^2} \frac{1}{\xi_1^2 - a^2 \xi_2^2} = \frac{1}{2\pi i} \delta(\xi_1) \otimes \mathbb{P} \frac{1}{\xi_2},$$

что полностью совпадает с результатами для случая полуплоскости (см. [1], [2]).

3. Многомерная трещина

Рассмотрим случай полуоси (трещины) в многомерном пространстве. Нас интересует асимптотика функции (см. [11])

$$\frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{(m+2)/2}} \frac{1}{(|\xi'|^2 - a^2(\xi_m + i0)^2)^{m/2}}, \quad (5)$$

где $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1})$, Γ – гамма-функция Эйлера. Трещина получится в случае, когда $a \rightarrow \infty$, а полупространство $x_m > 0$ в случае, когда $a \rightarrow 0$. Сначала рассмотрим случай трещины:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{(m+2)/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}, \xi_m)}{(|\xi'|^2 - a^2\xi_m^2)^{m/2}} d\xi \\ = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{(m+2)/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi(\xi', t/a)}{(|\xi'|^2 - t^2)^{m/2}} d\xi' dt \\ = \frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{(m+2)/2}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \varphi(\xi', 0) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(|\xi'|^2 - t^2)^{m/2}} \right) d\xi'. \end{aligned}$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(|\xi'|^2 - t^2)^{m/2}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(|\xi'|^2 - t^2)^{m/2}}.$$

Здесь следует различать случаи четных и нечетных m .

Рассмотрим сначала случай нечетных m , т.е. $m = 3, 5, 7, \dots$. С помощью соответствующей формулы из [28] можно записать

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(|\xi'|^2 - t^2)^{m/2}} &= \frac{1}{|\xi'|^{m-1}} \sum_{k=0}^{(m-3)/2} \frac{C_{(m-3)/2}^k t^{2k+1}}{(2k+1)(|\xi'|^2 - t^2)^{(2k+1)/2}} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{i|\xi'|^{m-1}} \sum_{k=0}^{(m-3)/2} (-1)^k \frac{1}{2k+1} C_{(m-3)/2}^k. \end{aligned}$$

Обозначим для удобства

$$b_m \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{(m-3)/2} (-1)^k \frac{1}{2k+1} C_{(m-3)/2}^k, \quad m = 3, 5, 7, \dots,$$

при этом $b_3 = 1$, $b_5 = 2/3$, $b_7 = 13/15$ и т.д.

Таким образом, для нечетных m мы получаем

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{(m+2)/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi(\xi', \xi_m)}{(|\xi'|^2 - a^2\xi_m^2)^{m/2}} d\xi = \frac{\Gamma(m/2)b_m}{2\pi^{(m+2)/2}i} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{\varphi(\xi', 0)}{|\xi'|^{m-1}} d\xi'. \quad (6)$$

В обобщенных функциях соотношение (6) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{(m+2)/2}} \frac{1}{(|\xi'|^2 - a^2\xi_m^2)^{m/2}} \\ = \frac{\Gamma(m/2)b_m}{i\pi^{(m+2)/2}} \mathcal{P} \frac{1}{|\xi'|^{m-1}} \otimes \delta(\xi_m), \quad m = 3, 5, 7, \dots \quad (7) \end{aligned}$$

Для существования интеграла в (6) и корректного определения функционала $P_{|\xi'|^{m-1}}$ следует сузить пространство основных функций дополнительным требованием наличия нуля нужного порядка в начале координат. Например, можно использовать пространство Φ , введенное П. И. Лизоркиным [29]. Обобщенная функция (7) должна быть многомерным аналогом использованной ранее функции $P_{\xi}^{\frac{1}{2}}$.

Теперь рассмотрим случай четных m , т. е. $m = 2, 4, 6, \dots$. Воспользовавшись формулой из [28] и обозначив $m/2 = k$, имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(|\xi'|^2 - t^2)^k} = \frac{t}{2(k-1)|\xi'|^2(|\xi'|^2 - t^2)^{k-1}} \Big|_0^{+\infty} + \frac{2(k-1) - 1}{2(k-1)|\xi'|^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(|\xi'|^2 - t^2)^{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

или после некоторых вычислений мы получим рекуррентную формулу

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(|\xi'|^2 - t^2)^k} = \frac{2k-3}{2(k-1)|\xi'|^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(|\xi'|^2 - t^2)^{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots$$

В плоском случае ($m = 2$) согласно уже произведенным вычислениям имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{|\xi'|^2 - t^2} = \frac{\pi i}{2|\xi'|}.$$

Таким образом, вычисления приводят к следующим результатам:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(|\xi'|^2 - t^2)^2} &= \frac{2 \cdot 2 - 3}{2(2-1)|\xi'|^3} \frac{\pi i}{2} = \frac{\pi i}{4|\xi'|^3}, \\ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(|\xi'|^2 - t^2)^3} &= \frac{(2 \cdot 3 - 3)(2 \cdot 2 - 3)}{2(3-1)2(2-1)} \frac{1}{|\xi'|^5} \frac{\pi i}{2}, \\ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(|\xi'|^2 - t^2)^4} &= \frac{(2 \cdot 4 - 3)(2 \cdot 3 - 3)(2 \cdot 2 - 3)}{2(4-1)2(3-1)2(2-1)} \frac{1}{|\xi'|^7} \frac{\pi i}{2}, \end{aligned}$$

что позволяет выписать общую формулу

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(|\xi'|^2 - t^2)^k} = \frac{\pi i}{2^k |\xi'|^{2k-1}} \prod_{l=2}^k \frac{2l-3}{l-1},$$

или, поскольку $k = m/2$, получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(|\xi'|^2 - t^2)^{m/2}} = \frac{\pi i}{2^{m/2} |\xi'|^{m-1}} \prod_{l=2}^{m/2} \frac{2l-3}{l-1}.$$

Обозначив для краткости и удобства

$$c_m = \prod_{l=2}^{m/2} \frac{2l-3}{l-1}, \quad m = 4, 6, 8, \dots$$

(при этом $c_4 = 1$, $c_6 = 3/2$, $c_8 = 5/2$, ...), запишем для четных m

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{(m+2)/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi(\xi', \xi_m)}{(|\xi'|^2 - a^2\xi_m^2)^{m/2}} d\xi = \frac{\Gamma(m/2)c_m i}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{\varphi(\xi', 0)}{|\xi'|^{m-1}} d\xi',$$

или в терминах обобщенных функций

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{(m+2)/2}} \frac{1}{(|\xi'|^2 - a^2\xi_m^2)^{m/2}} \\ = \frac{\Gamma(m/2)c_m i}{(2\pi)^{m/2}} \mathbb{P} \frac{1}{|\xi'|^{m-1}} \otimes \delta(\xi_m), \quad m = 4, 6, 8, \dots \end{aligned}$$

Автор не выделяет последний результат в теорему, поскольку пока не определен функционал $\mathbb{P} \frac{1}{|\xi'|^{m-1}}$.

Наконец, желательно проконтролировать себя и найти обобщенную функцию для полупространства $x_m > 0$ ($a \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{(m+2)/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi(\xi', \xi_m)}{(|\xi'|^2 - a^2\xi_m^2)^{m/2}} d\xi' d\xi_m \\ = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(m/2)b^{m-1}}{2\pi^{(m+2)/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi(\xi)}{(|b\xi'|^2 - \xi_m^2)^{m/2}} d\xi \\ = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{(m+2)/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi(t_1/b, \dots, t_{m-1}/b, \xi_m)}{(|t'|^2 - \xi_m^2)^{m/2}} dt_1 \dots dt_{m-1} d\xi_m \\ = \frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{(m+2)/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(0, \dots, 0, \xi_m) \left(\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{dt'}{(|t'|^2 - \xi_m^2)^{m/2}} \right) d\xi_m. \end{aligned}$$

Вычислим внутренний интеграл, переходя к сферическим координатам:

$$\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{dt'}{(|t'|^2 - \xi_m^2)^{m/2}} = \omega_{m-1} \int_0^{+\infty} \frac{r^{m-2}}{(r^2 - \xi_m^2)^{m/2}} dr,$$

где ω_{m-1} — площадь единичной сферы в $(m-1)$ -мерном пространстве \mathbb{R}^{m-1} ; $\omega_{m-1} = \frac{2\pi^{(m-2)/2}}{\Gamma((m-2)/2)}$ (см., например, [30]).

Используя соответствующую формулу из [28], мы получим ($m \geq 4$)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{r^{m-2}}{(r^2 - \xi_m^2)^{m/2}} dr &= \frac{1}{i^m} \int_0^{+\infty} \frac{r^{m-2}}{(\xi_m^2 - r^2)^{m/2}} dr \\ &= i^{-m} \left(\frac{r^{m-3}}{(m-2)(\xi_m^2 - r^2)^{(m-2)/3}} \Big|_0^{+\infty} - \frac{m-3}{m-2} \int_0^{+\infty} \frac{r^{m-4}}{(\xi_m^2 - r^2)^{(m-2)/2}} dr \right) \\ &= i^{-m} \frac{m-3}{m-2} \int_0^{+\infty} \frac{r^{m-4}}{(\xi_m^2 - r^2)^{(m-2)/2}} dr. \end{aligned}$$

Таким образом, если обозначить

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^{m-2}}{(\xi_m^2 - r^2)^{(m-2)/2}} dr \stackrel{\text{def}}{=} I_m(\xi_m),$$

то получим

$$I_m(\xi_m) = -\frac{m-3}{m-2} I_{m-2}(\xi_m). \quad (8)$$

Далее проведем вычисления при $m = 3$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{r}{(r^2 - c^2)^{3/2}} dr = -\frac{1}{(r^2 - c^2)^{3/2}} \Big|_0^{+\infty} = (-c^2)^{-1/2} = \frac{1}{ic} = -\frac{i}{c}, \quad I_3(c) = \frac{1}{c}$$

(в действительности c – это $c + i0$). При $m = 4$, используя рекуррентную формулу (8), получим

$$I_4(c) = \int_0^{+\infty} \frac{r^2}{(r^2 - c^2)^2} dr = -\frac{1}{2} I_2(c) = -\frac{\pi i}{2c}$$

(напомним, что $I_2(c) = \int_0^{+\infty} \frac{r^2}{c^2 - r^2} dr = \frac{\pi i}{2c}$). Далее также используем рекуррентную формулу (8):

$$\begin{aligned} I_5(c) &= -\frac{2}{3} I_3(c) = -\frac{2}{3} \frac{1}{c}, \\ I_6(c) &= -\frac{3}{4} I_4(c) = \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{\pi i}{4c}\right) = -\frac{3}{4} \left(-\frac{1}{4}\right) i \frac{\pi}{c}, \\ I_7(c) &= -\frac{4}{5} I_5(c) = -\frac{4}{5} \left(-\frac{2}{3}\right) \frac{1}{c}, \\ I_8(c) &= -\frac{5}{6} I_6(c) = -\frac{5}{6} \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{\pi i}{4c}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, при $m \geq 5$ можно записать

$$I_m(c) = \begin{cases} \left(-\frac{m-3}{m-2}\right) \left(-\frac{m-5}{m-4}\right) \cdots \left(-\frac{2}{3}\right) \frac{1}{c}, & m = 5, 7, 9, \dots, \\ \left(-\frac{m-3}{m-2}\right) \left(-\frac{m-5}{m-4}\right) \cdots \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{\pi i}{4c}\right), & m = 6, 8, 10, \dots \end{cases}$$

В силу вышеизложенного имеем

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a \Gamma(m/2)}{2\pi^{(m+2)/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi(\xi)}{(|\xi'|^2 - a^2 \xi_m^2)^{m/2}} d\xi \\ = \frac{\Gamma(m/2)}{2\pi^{(m+2)/2}} \frac{\omega_{m-1}}{i^m} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(0, \dots, 0, \xi_m) I_m(\xi_m) d\xi_m \\ = \frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{3/2} i^m \Gamma((m-1)/2)} d_m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(0, \dots, 0, \xi_m)}{\xi_m} d\xi_m, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$d_m = \begin{cases} -1, & m = 3, \\ -\frac{\pi i}{2}, & m = 4, \\ \left(-\frac{m-3}{m-2}\right) \left(-\frac{m-5}{m-4}\right) \cdots \left(-\frac{2}{3}\right), & m \geq 5, \quad m = 5, 7, 9, \dots, \\ \left(-\frac{m-3}{m-2}\right) \left(-\frac{m-5}{m-4}\right) \cdots \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{\pi i}{4}\right), & m > 5, \quad m = 6, 8, 10, \dots \end{cases}$$

Формула (9) с точки зрения обобщенных функций имеет следующий вид.

Теорема 2. *Справедлива формула*

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a\Gamma(m/2)}{2\pi^{(m+2)/2}} \frac{1}{(|\xi'|^2 - a^2\xi_m^2)^{m/2}} = \frac{\Gamma(m/2) d_m}{\pi^{3/2} i^m \Gamma((m-1)/2)} \delta(\xi') \otimes P \frac{1}{\xi_m}. \quad (10)$$

Из теоремы 2 следует, что (10) с точностью до постоянной дает известную формулу для полупространства. Значит, с точностью до знака имеем

$$\frac{\Gamma(m/2) d_m}{\pi^{3/2} i^m \Gamma((m-1)/2)} = \frac{1}{2\pi i}. \quad (11)$$

Соотношение (11) легко проверяется для $m = 3, 4, 5, 6$.

4. Пирамида

Теперь мы рассмотрим асимптотики, связанные с многогранным углом, точнее, с его простейшим вариантом – пирамидой. Внутренность такой пирамиды описывается неравенством $x_3 > a|x_1| + b|x_2|$, содержащим два параметра a, b , которые характеризуют соответствующие оси. Если эти параметры устремлять к нулю или к бесконечности, можно получить другие типы особенностей.

Обобщенная функция, соответствующая такой пирамиде, имеет вид [11]

$$K_{a,b}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{4iab}{(2\pi)^3} \frac{\xi_3}{(\xi_1^2 - a^2\xi_3^2)(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2)}.$$

Рассмотрим различные возможности взаимосвязей между a и b .

1) Случай $a = \text{const}$, $b \rightarrow \infty$ (интуитивно ясно, что должна получиться особенность типа бесконечной трещины в отличие от полубесконечной из раздела 2):

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{4iab}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{(\xi_1^2 - a^2\xi_3^2)(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2)} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{4ia_1b}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{(a_1^2 \xi_1^2 - \xi_3^2)(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2)} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{4i}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi_3 \varphi\left(\frac{t}{a_1b}, \xi_2, \xi_3\right)}{\left(\frac{t^2}{b^2} - \xi_3^2\right)(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2)} dt d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{4ib^2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi_3 \varphi\left(\frac{t}{a_1b}, \xi_2, \xi_3\right)}{(t^2 - b^2\xi_3^2)(\xi_2^2 - b^2\xi_3^2)} dt d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{4i}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tau \varphi\left(\frac{t}{a_1b}, \xi_2, \frac{\tau}{b}\right)}{(t^2 - \tau^2)(\xi_2^2 - \tau^2)} dt d\xi_2 d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(0, \xi_2, 0) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tau}{(t^2 - \tau^2)(\xi_2^2 - \tau^2)} dt d\tau \right) d\xi_2. \end{aligned}$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tau}{(t^2 - \tau^2)(\xi_2^2 - \tau^2)} dt d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - \tau^2} \right) \frac{\tau}{\xi_2^2 - \tau^2} d\tau.$$

Выражение, выписанное в скобках справа, вычислялось в разделе 2:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - \tau^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - \tau^2} = -\frac{\pi i}{\tau}.$$

Следовательно, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tau}{(t^2 - \tau^2)(\xi_2^2 - \tau^2)} dt d\tau = -\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\xi_2^2 - \tau^2} = -\pi i \cdot \frac{\pi i}{\xi_2} = \frac{\pi^2}{\xi_2}$$

и, значит,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{4iab}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{x} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(0, \xi_2, 0)}{\xi_2} d\xi_2.$$

Итак, в терминах обобщенных функций справедлива

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{4iab \xi_3}{(2\pi)^3 (\xi_1^2 - a^2 \xi_3^2) (\xi_2^2 - b^2 \xi_3^2)} = \frac{i}{2\pi} \delta(\xi_1) \otimes P \frac{1}{\xi_2} \otimes \delta(\xi_3).$$

2) Случай $a \rightarrow \infty$, $b = \text{const}$. Проведя аналогичные вычисления, можно получить формулу (которую запишем только в обобщенных функциях)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{4iab \xi_3}{(2\pi)^3 (\xi_1^2 - a^2 \xi_3^2) (\xi_2^2 - b^2 \xi_3^2)} = \frac{i}{2\pi} P \frac{1}{\xi_1} \otimes \delta(\xi_2) \otimes \delta(\xi_3).$$

3) Случай $a = \text{const}$, $b \rightarrow 0$ (двугранный угол):

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow 0} \frac{4iab}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{(\xi_1^2 - a^2 \xi_3^2) (\xi_2^2 - b^2 \xi_3^2)} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{4iac}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{(\xi_1^2 - a^2 \xi_3^2) (c^2 \xi_2^2 - \xi_3^2)} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{4ia}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, t_1/c, \xi_3)}{(\xi_1^2 - a^2 \xi_3^2) (t^2 - \xi_3^2)} d\xi_1 dt d\xi_3 \\ &= \frac{4ia}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, 0, \xi_3)}{\xi_1^2 - a^2 \xi_3^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - \xi_3^2} \right) d\xi_1 d\xi_3 \\ &= \frac{4ia}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, 0, \xi_3)}{\xi_1^2 - a^2 \xi_3^2} \left(\frac{-\pi i}{\xi_3} \right) d\xi_1 d\xi_3 \\ &= \frac{a}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\xi_3 \varphi(\xi_1, 0, \xi_3)}{\xi_1^2 - a^2 \xi_3^2} d\xi_1 d\xi_3, \end{aligned}$$

т. е. имеет место

Теорема 4. *Справедливо равенство*

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{4iab}{(2\pi)^3} \frac{\xi_3}{(\xi_1^2 - a^2 \xi_3^2) (\xi_2^2 - b^2 \xi_3^2)} = \delta(\xi_2) \otimes K_a(\xi_1, \xi_3),$$

где $K_a(\xi_1, \xi_3)$ введено в (1).

Аналогично выводится (в случае $a \rightarrow 0$, $b = \text{const}$) формула

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{4iab}{(2\pi)^3} \frac{\xi_3}{(\xi_1^2 - a^2 \xi_3^2) (\xi_2^2 - b^2 \xi_3^2)} = \delta(\xi_1) \otimes K_b(\xi_2, \xi_3).$$

Кроме этого, с учетом проведенных вычислений и результатов из раздела 2 получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Справедлива формула*

$$\lim_{a,b \rightarrow 0} \frac{4iab}{(2\pi)^3} \frac{\xi_3}{(\xi_1^2 - a^2 \xi_3^2)(\xi_2^2 - b^2 \xi_3^2)} = \frac{1}{2\pi i} \delta(\xi') \otimes P \frac{1}{\xi_3}, \quad \xi' = (\xi_1, \xi_2).$$

Последняя обобщенная функция соответствует полупространству.

5. Заключение

Автор надеется, что подобные эксперименты позволят ему разобраться в том, как можно подойти к формулировке условий нётеровости для многомерных сингулярных интегральных операторов и постановке краевых задач для псевдодифференциальных операторов в областях с описанными выше особенностями. Как видно из приведенных вычислений, предельные операторы имеют вид гораздо проще исходных (см. (1), (5)), что, возможно, позволит выявить удобный вид этих условий.

Автор выражает признательность рецензенту за его кропотливую работу, выявленные неточности и погрешности и все высказанные замечания.

Список литературы

1. Вишик М. И., Эскин Г. И. *Уравнения в свертках в ограниченной области*. УМН, **20**:3 (1965), 89–152; англ. пер.: VISHIK M., ESKIN G. I. *Equations in convolutions in a bounded region*. Russ. Math. Surv., **20**:3 (1965), 85–151.
2. Эскин Г. И. *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений*. Наука, М., 1973; англ. пер.: ESKIN G. *Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations*. AMS, Providence, RI, 1981.
3. Михлин С. Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*. Физматгиз, М., 1962; англ. пер.: Mikhlin S. G. *Multidimensional singular integrals and integral equations*. International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, **83**, Pergamon Press, Oxford–London–Edinburgh–New York–Paris–Frankfurt, 1965.
4. MIKHILIN S. G., PRÖSSDORF S. *Singular integral operators*. Akademie-Verlag, Berlin, 1986.
5. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*. Т. 1–4. Мир, М., 1986–1988; пер. с англ.: HÖRMANDER L. *Analysis of partial differential operators*. V. 1–4. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
6. Трев Ф. *Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье*. Т. 1, 2. Мир, М., 1984; пер. с англ.: TREVES F. *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators*. V. 1, 2. Plenum Press, New York–London, 1982.
7. Тейлор М. *Псевдодифференциальные операторы*. Мир, М., 1985; пер. с англ.: TAYLOR M. *Pseudodifferential operators*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1981.
8. Ремпель Ш., Шулце Б.-В. *Теория индекса эллиптических краевых задач*. Мир, М., 1986; пер. с англ.: REMPEL S., SCHULZE B.-W. *Index theory of elliptic boundary problems*. Akademie-Verlag, Berlin, 1982.
9. BOUTET DE MONVE L. *Boundary problems for pseudodifferential operators*. Acta Mathematica, **126**:1–2 (1971), 11–51.

10. VASIL'EV V. B. *Wave factorization of elliptic symbols: theory and applications. Introduction to the theory of boundary value problems in non-smooth domains*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 2000.
11. ВАСИЛЬЕВ В. Б. *Регуляризация многомерных сингулярных интегральных уравнений в негладких областях*. Тр. ММО, **59**, Изд-во МГУ, М., 1998, 73–105; англ. пер.: VASIL'EV V. B. *Regularization of multidimensional singular integral equations in non-smooth domains*. Trans. Moscow Math. Soc., **59** (1998), 65–93.
12. КОНДРАТЬЕВ В. А. *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*. Тр. ММО, **16**, Изд-во МГУ, М., 1967, 209–292.
13. ВАСИЛЬЕВ В. Б. *Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи*. КомКнига, М., 2010.
14. СТЕРНИН Б. Ю. *Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности*. Тр. ММО, **15**, Изд-во МГУ, М., 1966, 346–382.
15. БОХНЕР С., МАРТИН У. Т. *Функции многих комплексных переменных*. ИЛ, М., 1951; пер. с англ.: BOCHNER S., MARTIN W. T. *Several complex variables*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.
16. ВЛАДИМИРОВ В. С. *Методы теории функций многих комплексных переменных*. Наука, М., 1964.
17. KING F. W. *Hilbert transforms*. V. 1–2. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
18. ВЛАДИМИРОВ В. С. *Задача линейного сопряжения для голоморфных функций*. Изв. АН СССР. Сер. матем., **29**:4 (1965), 807–834.
19. ВЛАДИМИРОВ В. С. *Задача линейного сопряжения голоморфных функций многих комплексных переменных*, в кн.: *Современные проблемы теории аналитических функций*. Сб. статей. Наука, М., 1966, 64–68.
20. ГАХОВ Ф. Д. *Краевые задачи*. Наука, М., 1977; англ. пер.: GAKHOV F. D. *Boundary value problems*, Dover Publ., New York, 1990.
21. КАКИЧЕВ В. А. *Краевые задачи линейного сопряжения для функций, голоморфных в биглиндрических областях*. Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков), **5** (1967), 37–58.
22. РАБИНОВИЧ В. С. *Многомерное уравнение Винера–Хопфа для конусов*. Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков), **5** (1967), 59–67.
23. МИХЛИН С. Г. *Линейные уравнения в частных производных*. Высшая школа, М., 1977.
24. МАЛЬГРАНЖ Б. *Сингулярные интегральные операторы и единственность задачи Коши*. Сб. перев.: Математика, **6**:5 (1962), 87–129; пер. с фр.: MALGRANGE B. *Opérateurs intégraux singuliers unicité du problème de Cauchy*. Séminaire Schwartz, Secrétariat mathématique, 4-e année, 1955/1960, Paris, 1960, exposés 1–10.
25. КАСУМОВ Н. М. *Теория Кальдерона–Зигмунда для ядер с неточечными множествами особенностей*. Матем. сб., **183**:9 (1992), 89–104; англ. пер.: KASUMOV N. M. *Calderon–Zygmund theory for kernels with nondiscrete sets of singularities*. Sb. Math., **77**:1 (1994), 71–91.
26. ВЛАДИМИРОВ В. С. *Уравнения математической физики*. Наука, М., 1981.
27. ВЛАДИМИРОВ В. С. *Обобщенные функции в математической физике*. Наука, М., 1979.
28. ГРАДШТЕЙН И. С., РЫЖИК И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Наука, М., 1971.

29. САМКО С. Г. *Гиперсингулярные интегралы и их приложения*. Изд-во Ростовского ун-та, Ростов-на-Дону, 1984; англ. пер.: САМКО S. *Hypersingular integrals and their applications*. CRC Press, London, 2002.
30. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 3. Наука, М., 1968.

ВЛАДИМИР БОРИСОВИЧ ВАСИЛЬЕВ
Липецкий государственный технический университет,
кафедра высшей математики
E-mail: vbv57@inbox.ru

Поступило 29.04.2014

Applied Mathematics and Mathematical Physics
2015, Vol. 1, No. 1, 3–16

Pseudo Differential Equations, Singular Integrals, and Distributions

V. B. VASILYEV

Abstract. One considers some distributions related to canonical singularities, which are important in the theory of pseudo differential equations on manifolds with non-smooth boundary. These are the kernels of singular integral operators, for which their invertibility implies the Fredholm property for a considered boundary value problem. In this paper one studies the case, when this singularity becomes degenerated one, and the author tries to describe the corresponding distributions.

Keywords: pseudo differential equation, distribution, singular integral.

MSC2010: 35S05, 46F10



УДК 517.574

Об устранимости множеств уровня для субгармонических функций

А. В. Покровский

Аннотация. Показано, что известное локальное условие Бляшке–Привалова, выделяющее субгармонические функции в заданной евклидовой области из множества вещественных полунепрерывных сверху функций, определенных в этой области и тождественно не равных $-\infty$, может быть заменено на множестве нулей рассматриваемой функции другим априори более слабым локальным условием того же типа. В качестве одного из следствий основного результата работы установлено, что любая функция, непрерывная в евклидовой области и субгармоническая на дополнении к множеству своих нулей, является субгармонической во всей рассматриваемой области, если в каждом своем нуле эта функция имеет полный дифференциал.

Ключевые слова: теорема Радо, субгармоническая функция, вязкостно субгармоническая функция, условие Бляшке–Привалова.

Введение

В. С. Федоров в 1919 г. доказал [1], что любая функция $f(z)$, непрерывная в области $G \subset \mathbb{C}$, равная нулю во всех точках некоторого всюду разрывного компакта $K \subset G$ и голоморфная в $G \setminus K$, является голоморфной в G . Опубликованная в малодоступном издании во время Гражданской войны, работа В. С. Федорова была многие годы неизвестна широкому кругу специалистов, и сейчас результаты подобного типа связывают с именем Т. Радо [2], который в 1924 г. доказал, что любая функция $f(z)$, непрерывная в области $G \subset \mathbb{C}$ и голоморфная на множестве $G \setminus f^{-1}(0)$, является голоморфной в G . Здесь, как обычно, $f^{-1}(0) := \{z \in G: f(z) = 0\}$.

Аналогом результата Радо для гармонических функций нескольких переменных является теорема Й. Крала [3], которая утверждает, что любая функция $u(x)$, непрерывно дифференцируемая в области $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и гармоническая на множестве $G \setminus u^{-1}(0)$, является гармонической в G . Здесь и далее мы рассматриваем функции, принимающие только вещественные значения. Позднее Й. Крал [4] обобщил эту теорему на решения линейных эллиптических уравнений второго порядка с постоянными действительными коэффициентами. В работе [5] результаты Крала распространены на широкий класс квазилинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка, включающий в себя уравнение $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$, $1 < p < \infty$, и уравнение минимальных поверхностей.

Настоящая работа посвящена ослаблению условия непрерывной дифференцируемости функции $u(x)$ на множестве $u^{-1}(0)$ в сформулированной выше теореме Крала об устранимых особенностях гармонических функций. На самом деле мы доказываем более общий результат, который показывает, что известное локальное условие Бляшке–Привалова, выделяющее субгармонические функции из множества полунепрерывных сверху функций, определенных в заданной евклидовой области и не равных в этой области тождественно $-\infty$, может быть заменено на множестве нулей рассматриваемой функции другим априори более слабым локальным условием того же типа.

Чтобы сформулировать основной результат работы, напомним некоторые определения и введем ряд обозначений. Для точки $x \in \mathbb{R}^n$ и числа $r > 0$ мы обозначаем через $B(x, r)$ и $S(x, r)$ соответственно замкнутый евклидов шар и евклидову сферу с центром в точке x и радиусом r .

Как обычно, функцию $u(x)$, определенную в области G , мы называем *субгармонической*, если она полунепрерывна сверху в G , $u(x) \not\equiv -\infty$ и для любой подобласти $G_0 \subset\subset G$ и любой функции $v(x)$, непрерывной на замыкании $\overline{G_0}$ области G_0 , гармонической в G_0 и такой, что

$$v(x) \geq u(x) \quad (1)$$

во всех граничных точках x области G_0 , неравенство (1) выполняется для всех $x \in G_0$. Под функцией, субгармонической на открытом множестве, мы будем понимать функцию, которая является субгармонической на каждой связной компоненте этого множества.

Субгармонические функции характеризуются условием Бляшке–Привалова, для формулировки которого, следуя [6, гл. 2, § 2], напомним определение верхнего и нижнего обобщенных параметров Лапласа функции $u(x)$, полунепрерывной сверху в области $G \subset \mathbb{R}^n$ ($u(x) \not\equiv -\infty$). Заметим, что каждая такая функция измерима и ограничена сверху на каждой сфере $S(x_0, r)$, для которой $B(x_0, r) \subset G$, $x_0 \in G$, $r > 0$. Поэтому ее положительная часть $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$ будет измеримой суммируемой функцией на $S(x_0, r)$, а ее отрицательная часть $u^-(x) := \max\{-u(x), 0\}$ будет измеримой функцией на $S(x_0, r)$. Если функция $u^-(x)$ суммируема на сфере $S(x_0, r)$, то на этой сфере суммируема и функция $u(x)$; в этом случае мы определяем величину $M_r u(x_0)$ как среднее значение функции $u(x)$ по сфере $S(x_0, r)$. Если же функция $u^-(x)$ не является суммируемой на $S(x_0, r)$, то полагаем $M_r u(x_0) := -\infty$.

Пусть, как и выше, функция $u(x)$ полунепрерывна сверху в области G , $u(x) \not\equiv -\infty$. Для точки $x_0 \in G$, в которой $u(x_0) \neq -\infty$, определим значения верхнего $\overline{\Delta}u(x_0)$ и нижнего $\underline{\Delta}u(x_0)$ обобщенных параметров Лапласа функции $u(x)$ в точке x_0 равенствами

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}u(x_0) &:= 2n \overline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{M_r u(x_0) - u(x_0)}{r^2}, \\ \underline{\Delta}u(x_0) &:= 2n \underline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{M_r u(x_0) - u(x_0)}{r^2}. \end{aligned}$$

Отметим, что величины $\overline{\Delta}u(x_0)$ и $\underline{\Delta}u(x_0)$ могут принимать значения, равные $+\infty$ и $-\infty$, для которых мы устанавливаем следующие соглашения: $-\infty < t < +\infty$ и $-\infty + t = -\infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$; $t \cdot (-\infty) = -\infty$ для всех $t > 0$;

если $\alpha(t) := -\infty$ при всех достаточно малых $t > 0$, то $\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \alpha(t) = -\infty$. (Например, пусть функция $u(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ определена равенствами $u(z) = -|x|^{-1}$ при $x \neq 0$, $u(z) = -\infty$ при $x = 0$ и $y \neq 0$, $u(0) = 0$. Тогда $u(z)$ полунепрерывна сверху в \mathbb{C} , $M_r u(0) = -\infty$ при всех $r > 0$, $\overline{\Delta}u(0) = 4 \overline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{-\infty - 0}{r^2} = -\infty$.)

Предположим, что в каждой точке $x_0 \in G$, в которой $u(x_0) \neq -\infty$, выполнено условие

$$\overline{\Delta}u(x_0) \geq 0. \quad (2)$$

Тогда функция $u(x)$ является субгармонической в G . Доказательство этого факта очень простое и восходит к работам В. Бляшке и И. И. Привалова (см. [6, гл. 2, § 2]). Напомним его.

Зафиксируем произвольным образом область $G_0 \subset\subset G$ и функцию $v(x)$, непрерывную на $\overline{G_0}$, гармоническую в G_0 и удовлетворяющую условию (1) во всех граничных точках x области G_0 . Пусть $\varepsilon > 0$, $w(x) := |x|^2$. Предположим, что функция $u_\varepsilon(x) := u(x) - v(x) + \varepsilon w(x)$ достигает своего локального максимума в точке $x_0 \in G_0$. Тогда $u(x_0) \neq -\infty$ и в точке x_0 выполнено условие (2). Поскольку $M_r w(x_0) - w(x_0) = r^2$ при всех $r > 0$, из (2) следует неравенство $\overline{\Delta}u_\varepsilon(x_0) \geq 2n\varepsilon$, несовместимое с наличием локального максимума функции $u_\varepsilon(x)$ в точке x_0 . Следовательно, для всех $x \in G_0$ справедливо неравенство $u(x) - v(x) + \varepsilon w(x) \leq \varepsilon \max_{x \in \overline{G_0}} w(x)$. Предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow +0$ отсюда получаем, что $u(x) - v(x) \leq 0$ для всех $x \in G_0$. Это означает, что функция $u(x)$ субгармонична в G .

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть G – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $u(x)$ – функция, полунепрерывная сверху в области G , $u(x) \not\equiv -\infty$, и пусть в каждой точке $x_0 \in G \setminus u^{-1}(0)$, в которой $u(x_0) \neq -\infty$, выполнено условие Бляшке–Привалова (2), а в каждой точке $x_0 \in u^{-1}(0)$ выполнено условие

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{M_r u(x_0)}{r} \geq 0. \quad (3)$$

Тогда функция $u(x)$ субгармонична в G .

Для точки $x_0 \in u^{-1}(0)$ условие Бляшке–Привалова (2) имеет вид

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{M_r u(x_0)}{r^2} \geq 0,$$

и потому является более сильным, чем (3).

Следующий пример иллюстрирует точность условия (3) в теореме 1. Пусть функция $u(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ определена равенством $u(z) := -|x|$. Тогда множество $u^{-1}(0)$ совпадает с мнимой осью, функция $u(z)$ гармонична в $\mathbb{C} \setminus u^{-1}(0)$, а в каждой точке $z_0 \in u^{-1}(0)$ выполнены равенства $M_r(z_0) = -4r$ для всех $r > 0$, $\overline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{M_r u(z_0)}{r} = -\frac{2}{\pi}$, $\overline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{M_r u(z_0)}{r^\alpha} = 0$ для всех $\alpha < 1$. Очевидно, что $u(z)$ не является субгармонической функцией в \mathbb{C} . Следовательно, условие (3) нельзя заменить условием $\overline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{M_r u(x_0)}{r} > -\infty$, а тем более условием $\overline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{M_r u(x_0)}{r^\alpha} \geq 0$ при некотором $\alpha < 1$, являющимся более слабым условием. Этот же пример показывает, что условие непрерывной

дифференцируемости функции $u(x)$ в теореме Крала нельзя заменить условием ее липшицевости.

Настоящая работа состоит из введения и трех разделов. Раздел 1 носит вспомогательный характер, раздел 2 посвящен доказательству теоремы 1, а в разделе 3 приводится ряд следствий теоремы 1, которые, в частности, содержат в себе упомянутый результат Крала.

1. Определения и вспомогательные результаты

Пусть G – область в \mathbb{R}^n . Как обычно, $C(G)$ и $C^2(G)$ – соответственно пространства непрерывных и дважды непрерывно дифференцируемых функций в области G , Δ – оператор Лапласа.

Доказательство теоремы 1 базируется на глубоком результате П. Ютинена, П. Линдквиста и Х. Манфреди [7] о совпадении множества функций, субгармонических в области G , с множеством так называемых вязкостно субгармонических функций в G . Заметим также, что результаты работы [7] содержат эквивалентное определение решений и субрешений более общих квазилинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка с p -лапласианом ($1 < p < \infty$), однако, чтобы не усложнять изложение, мы приводим необходимые нам формулировки результатов из этой работы только применительно к уравнению Лапласа.

Следуя работе [7], мы будем говорить, что функция $u(x)$ является *вязкостно субгармонической* в области G , если эта функция полунепрерывна сверху, не равна тождественно $-\infty$ в G и выполнено следующее условие: каковы бы ни были точка $x_0 \in G$ и функция $\varphi \in C^2(G)$ такие, что $\varphi(x_0) = u(x_0)$, $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ и $\varphi(x) > u(x)$ для всех $x \in G \setminus \{x_0\}$, имеет место неравенство $\Delta\varphi(x_0) \geq 0$. Здесь, как обычно, $\nabla\varphi(x_0)$ обозначает градиент функции φ в точке x_0 .

Из приведенного определения непосредственно следует, что каждая субгармоническая функция в G является вязкостно субгармонической функцией в этой области. Для доказательства этого отметим, что для каждой функции $\varphi \in C^2(G)$ и всех $x \in G$ справедливы равенства $\bar{\Delta}\varphi(x) = \underline{\Delta}\varphi(x) = \Delta\varphi(x)$ (см. [6, гл. 2, §2]). Отсюда следует, что если функция $u(x)$ субгармонична в G , а точка $x_0 \in G$ и функция $\varphi \in C^2(G)$ таковы, что $\varphi(x_0) = u(x_0)$ и $\varphi(x) > u(x)$ для всех $x \in G \setminus \{x_0\}$, то

$$\Delta\varphi(x_0) = \bar{\Delta}\varphi(x_0) \geq \bar{\Delta}u(x_0) \geq 0, \quad (4)$$

что и означает вязкостную субгармоничность функции $u(x)$ в области G . Следующая лемма, являющаяся частным случаем теоремы 2.7 из [7], играет ключевую роль в доказательстве теоремы 1.

Лемма 1. *Каждая вязкостно субгармоническая функция в области G субгармонична в G .*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть G – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $u(x)$ – полунепрерывная сверху функция в области G , $u(x) \not\equiv -\infty$, удовлетворяющая условиям теоремы 1, и пусть $0 < \varepsilon < 1$. Определим в области G функцию $u_\varepsilon(x)$ следующими равенствами: $u_\varepsilon(x) = -\infty$,

если $u(x) = -\infty$; $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon|u(x)|$, если $u(x) \neq -\infty$. Поскольку функция $u(x)$ не равна тождественно $-\infty$ в G , отсюда следует, что этим же свойством обладает и функция $u_\varepsilon(x)$. Из определения функции $u_\varepsilon(x)$ также следует, что $u_\varepsilon(x) = (1 + \varepsilon)u(x)$ при $u(x) > 0$, $u_\varepsilon(x) = 0$ при $u(x) = 0$, $u_\varepsilon(x) = (1 - \varepsilon)u(x)$ при $u(x) < 0$. Покажем, что $u_\varepsilon(x)$ является вязкостно субгармонической функцией в области G .

Для этого сначала установим полунепрерывность сверху функции $u_\varepsilon(x)$ в G . Воспользуемся следующим хорошо известным характеристическим свойством полунепрерывных сверху функций (см., например, [8, гл. 1, §1.2]): функция полунепрерывна сверху в области G тогда и только тогда, когда она является поточечным пределом некоторой убывающей последовательности функций, непрерывных в G . Поскольку функция $u(x)$ полунепрерывна сверху в G , существует убывающая последовательность непрерывных в G функций $\{g_k(x)\}_{k=1}^\infty$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = u(x)$ в каждой точке $x \in G$. Определим функции $g_{\varepsilon,k}(x)$, $k = 1, 2, \dots$, равенствами $g_{\varepsilon,k}(x) = g_k(x) + \varepsilon|g_k(x)|$, $x \in G$. Легко видеть, что $\{g_{\varepsilon,k}(x)\}_{k=1}^\infty$ — убывающая последовательность непрерывных функций в области G , сходящаяся к $u_\varepsilon(x)$ в каждой точке $x \in G$. Следовательно, функция $u_\varepsilon(x)$ полунепрерывна сверху в G и $u_\varepsilon(x) \not\equiv -\infty$.

Покажем, что в каждой точке $x_0 \in G \setminus u^{-1}(0)$, для которой $u_\varepsilon(x_0) \neq -\infty$, функция $u_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию Бляшке–Привалова. Зафиксируем такую точку x_0 . Тогда возможны случаи $u(x_0) > 0$ и $u(x_0) < 0$. Если $u(x_0) > 0$, то, поскольку функция $u(x)$ удовлетворяет условию Бляшке–Привалова (2) в точке x_0 , существуют убывающие к нулю последовательности положительных чисел $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ такие, что $B(x_0, r_k) \subset G$, при всех $k = 1, 2, \dots$ функция $u(x)$ суммируема на сфере $S(x_0, r_k)$ и справедливы неравенства

$$0 < u(x_0) - \delta_k r_k^2 \leq M_{r_k} u(x_0). \quad (5)$$

Поскольку $u(x_0) > 0$, из (5) следует цепочка соотношений

$$0 < |u(x_0)| - \delta_k r_k^2 = u(x_0) - \delta_k r_k^2 \leq M_{r_k} u(x_0) = |M_{r_k} u(x_0)| \leq M_{r_k} |u(x_0)|. \quad (6)$$

Из (5) и (6) вытекает, что

$$\begin{aligned} 0 < u_\varepsilon(x_0) - (1 + \varepsilon)\delta_k r_k^2 &= u(x_0) - \delta_k r_k^2 + \varepsilon|u(x_0)| - \varepsilon\delta_k r_k^2 \\ &\leq M_{r_k} u(x_0) + \varepsilon M_{r_k} |u(x_0)| = M_{r_k} u_\varepsilon(x_0), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

и, следовательно, функция $u_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию Бляшке–Привалова в точке x_0 .

Если точка $x_0 \in G \setminus u^{-1}(0)$ выбрана так, что $0 > u(x_0) > -\infty$, то ввиду полунепрерывности сверху функции $u(x)$ в x_0 эта функция принимает только отрицательные значения в некоторой окрестности точки x_0 . Поэтому для всех точек x этой окрестности справедливо равенство $u_\varepsilon(x) = (1 - \varepsilon)u(x)$ и, следовательно, функция $u_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию Бляшке–Привалова в точке x_0 .

Покажем теперь, что $u_\varepsilon(x)$ является вязкостно субгармонической функцией в G . Пусть $x_0 \in G$ и $\varphi \in C^2(G)$ таковы, что $\varphi(x_0) = u_\varepsilon(x_0)$, $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ и $\varphi(x) > u_\varepsilon(x)$ для всех $x \in G \setminus \{x_0\}$. Тогда $u_\varepsilon(x_0) \geq u(x_0) > -\infty$. Если $x_0 \in G \setminus u^{-1}(0)$, то согласно доказанному выше функция $u_\varepsilon(x)$ в точке x_0 удовлетворяет условию Бляшке–Привалова

$$\bar{\Delta}u_\varepsilon(x_0) \geq 0, \quad (7)$$

откуда с помощью цепочки неравенств типа (4) получаем, что

$$\Delta\varphi(x_0) \geq 0. \quad (8)$$

Рассмотрим случай $x_0 \in u^{-1}(0)$. Ввиду условия (3) для каждой такой точки x_0 существует убывающая к нулю последовательность положительных чисел $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, зависящая от x_0 , такая, что $B(x_0, r_1) \subset G$, функция $u(x)$ (а следовательно, и функция $u_\varepsilon(x)$) суммируема на сферах $S(x_0, r_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Будем различать точки двух типов. К первому типу отнесем те точки, для которых существует убывающая к нулю последовательность положительных чисел $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, зависящая от x_0 , такая, что $B(x_0, r_1) \subset G$, функции $u(x)$ и $u_\varepsilon(x)$ суммируемы на сферах $S(x_0, r_k)$, $k = 1, 2, \dots$, и

$$|M_{r_k}u(x_0)| = o(M_{r_k}|u|(x_0)), \quad k \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Поскольку $u(x_0) = 0$, для точки x_0 первого типа из (9) следует (7). Отсюда, как и выше, получаем неравенство (8) (заметим, что условие $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ пока не использовалось в наших рассуждениях).

Осталось рассмотреть точки второго типа, т.е. такие точки $x_0 \in u^{-1}(0)$, для которых существуют $c_0 \in (0, 1)$ и $r_0 > 0$ такие, что $B(x_0, r_0) \subset G$ и при каждом $r \in (0, r_0)$ из суммируемости функции $u(x)$ на сфере $S(x_0, r)$ вытекает неравенство

$$|M_r u(x_0)| \geq c_0 M_r |u|(x). \quad (10)$$

При этом, уменьшая при необходимости r_0 , мы будем в дальнейшем предполагать, что $M_r u(x_0) < 0$ для всех $r \in (0, r_0)$, поскольку иначе выполняются неравенства (7) и (8). В этом случае условие (10) эквивалентно условию

$$M_r u(x_0) \leq -c_0 M_r |u|(x). \quad (11)$$

Обозначим через $l(x)$ полный дифференциал функции φ в точке x_0 :

$$l(x) := (\nabla\varphi(x_0) \cdot (x - x_0)),$$

где $(a \cdot b)$ обозначает, как обычно, скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $\varphi \in C^2(G)$, а $\varphi(x_0) = u(x_0) = 0$, то

$$\varphi(x) = l(x) + o(|x - x_0|), \quad x \rightarrow x_0. \quad (12)$$

Пусть $E = \{x \in G: l(x) < 0\}$. Поскольку $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$, то $l(x) \neq 0$ и, интегрируя (12) по множеству $S(x_0, r) \cap E$, $0 < r < r_0$, получим

$$\int_{S(x_0, r) \cap E} \varphi(x) d\sigma(x) = \int_{S(x_0, r) \cap E} l(x) d\sigma(x) + o(r^n), \quad r \rightarrow +0, \quad (13)$$

где $d\sigma(x)$ – элемент площади поверхности сферы $S(x_0, r)$. Поскольку функция $l(x)$ линейна и $l(x) \neq 0$, то

$$\int_{S(x_0, r) \cap E} l(x) d\sigma(x) = -\frac{1}{2} \int_{S(x_0, r)} |l(x)| d\sigma(x) = -c_1 r^n, \quad (14)$$

где c_1 – некоторая положительная постоянная. Из (13) и (14) получаем, что

$$\int_{S(x_0, r) \cap E} \varphi(x) d\sigma(x) = -c_1 r^n + o(r^n), \quad r \rightarrow +0. \quad (15)$$

Из (15) следует, что, уменьшая при необходимости r_0 , можно считать, что при всех $r \in (0, r_0)$ имеет место неравенство

$$\int_{S(x_0, r) \cap E} \varphi(x) d\sigma(x) \leq -\frac{c_1}{2} r^n. \quad (16)$$

Поскольку для каждой точки $x \in G$ выполняются либо равенства $u_\varepsilon(x) = u(x) = -\infty$, либо неравенства $u_\varepsilon(x) \geq u(x) > -\infty$, а $\varphi(x) \geq u_\varepsilon(x)$ всюду в G , то из (16) получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{S(x_0, r) \cap E} u(x) d\sigma(x) &\leq \int_{S(x_0, r) \cap E} u_\varepsilon(x) d\sigma(x) \\ &\leq \int_{S(x_0, r) \cap E} \varphi(x) d\sigma(x) \leq -\frac{c_1}{2} r^n. \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть $F = \{x \in G: u(x) < 0\}$. Тогда из (17) получаем

$$\int_{S(x_0, r) \cap E \cap F} u(x) d\sigma(x) \leq \int_{S(x_0, r) \cap E} u(x) d\sigma(x) \leq -\frac{c_1}{2} r^n.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \int_{S(x_0, r)} |u(x)| d\sigma(x) &\geq \int_{S(x_0, r) \cap E \cap F} |u(x)| d\sigma(x) \\ &= - \int_{S(x_0, r) \cap E \cap F} u(x) d\sigma(x) \geq \frac{c_1}{2} r^n, \end{aligned}$$

откуда вытекает существование постоянной $c_2 > 0$ такой, что неравенство

$$M_r |u|(x_0) \geq c_2 r \quad (18)$$

выполняется при всех $r \in (0, r_0)$. Неравенства (11) и (18) влекут оценку

$$M_r u(x_0) \leq -c_0 c_2 r, \quad 0 < r < r_0,$$

из которой следует, что

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{M_r u(x_0)}{r} \leq -c_0 c_2 < 0. \quad (19)$$

Однако (19) противоречит условию (3) теоремы 1.

Проведенный анализ показывает, что функция $u_\varepsilon(x)$ является вязкостно субгармонической в области G . Применяя лемму 1, отсюда делаем заключение о субгармоничности этой функции в G . Поскольку ε в наших рассуждениях было произвольным числом из интервала $(0, 1)$, мы доказали, что для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$ функция $u_\varepsilon(x)$ субгармонична в области G . Покажем, что это влечет за собой субгармоничность функции $u(x)$ в G . Для этого, очевидно, достаточно установить, что функция $u(x)$ удовлетворяет условию Бляшке–Привалова (2) в каждой точке $x_0 \in u^{-1}(0)$.

Зафиксируем точку $x_0 \in u^{-1}(0)$ и число $r_0 > 0$ такие, что $B(x, r_0) \subset G$, и пусть $r \in (0, r_0)$. Поскольку все функции $u_\varepsilon(x)$ субгармоничны в G и, следовательно, суммируемы на сфере $S(x_0, r)$, а $u_\varepsilon(x_0) = u(x_0) = 0$, то

$$\int_{S(x_0, r)} u_\varepsilon(x) d\sigma(x) \geq 0, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (20)$$

Переходя к положительным и отрицательным частям, перепишем (20) следующим образом:

$$\int_{S(x_0, r)} u_{\varepsilon}^{-}(x) d\sigma(x) \leq \int_{S(x_0, r)} u_{\varepsilon}^{+}(x) d\sigma(x). \quad (21)$$

Пусть $M = \max_{x \in B(x_0, r_0)} u(x)$ (достижение этого максимума обеспечивается полунепрерывностью сверху функции $u(x)$). Тогда для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \int_{S(x_0, r)} u_{\varepsilon}^{+}(x) d\sigma(x) &\leq (1 + \varepsilon) \int_{S(x_0, r)} u^{+}(x) d\sigma(x) \\ &\leq 2 \int_{S(x_0, r)} u^{+}(x) d\sigma(x) \leq 2M\sigma_n r^{n-1}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\sigma_n = \int_{S(0,1)} d\sigma(x)$. Объединяя (21) и (22), при всех $\varepsilon \in (0, 1)$ получаем неравенства

$$\int_{S(x_0, r)} u_{\varepsilon}^{-}(x) d\sigma(x) \leq \int_{S(x_0, r)} u_{\varepsilon}^{+}(x) d\sigma(x) \leq 2M\sigma_n r^{n-1}. \quad (23)$$

Применив теорему Фату о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (при $\varepsilon \rightarrow +0$), заключаем из (23), что функции $u^{-}(x)$ и $u^{+}(x)$ суммируемы на сфере $S(x_0, r)$ и

$$\int_{S(x_0, r)} u^{-}(x) d\sigma(x) \leq \int_{S(x_0, r)} u^{+}(x) d\sigma(x) \leq 2M\sigma_n r^{n-1},$$

откуда получаем суммируемость функции $u(x)$ на $S(x_0, r)$ и неравенство

$$\int_{S(x_0, r)} u(x) d\sigma(x) \geq 0. \quad (24)$$

Поскольку в приведенных рассуждениях r было произвольным числом из интервала $(0, r_0)$, неравенство (24) влечет за собой выполнение для функции $u(x)$ условия Бляшке–Привалова (2) в точке x_0 .

Таким образом, мы показали, что в каждой точке $x_0 \in u^{-1}(0)$ функция $u(x)$ удовлетворяет условию Бляшке–Привалова (2). В сочетании с другими условиями теоремы 1 это означает, что функция $u(x)$ является субгармонической в области G . Теорема 1 доказана.

3. Некоторые следствия теоремы 1

Приведем ряд результатов, являющихся простыми следствиями теоремы 1. Всюду ниже G – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$.

Следствие 1. Пусть $u(x)$ – функция, непрерывная в G , и пусть в каждой точке $x_0 \in G \setminus u^{-1}(0)$ выполнено условие

$$\underline{\Delta}u(x_0) \leq 0 \leq \overline{\Delta}u(x_0), \quad (25)$$

а в каждой точке $x_0 \in u^{-1}(0)$ выполнено условие

$$\underline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{M_r u(x_0)}{r} \leq 0 \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{M_r u(x_0)}{r}. \quad (26)$$

Тогда функция $u(x)$ гармонична в G .

Следствие 1 вытекает из теоремы 1 путем ее последовательного применения к функциям $u(x)$ и $-u(x)$.

Если $u \in C(G)$, то множество $u^{-1}(0)$ замкнуто в G , а множество $G \setminus u^{-1}(0)$ открыто и по теореме Бляшке–Привалова выполнение условия (25) в каждой точке $x_0 \in G \setminus u^{-1}(0)$ эквивалентно гармоничности функции $u(x)$ на множестве $G \setminus u^{-1}(0)$. Поэтому следствие 1 переписывается в следующем виде.

Следствие 2. Пусть $u(x)$ – функция, непрерывная в G и гармоническая на множестве $G \setminus u^{-1}(0)$, и пусть в каждой точке $x_0 \in u^{-1}(0)$ выполнено условие (26). Тогда функция $u(x)$ гармонична в G .

Укажем (в порядке усиления) три условия, выполнение которых для функции $u \in C(G)$ в точке $x_0 \in u^{-1}(0)$ гарантирует выполнение условия (26):

- а) $\lim_{r \rightarrow +0} \frac{|M_r u(x_0)|}{r} = 0$;
- б) $M_r u(x_0) = o(r)$ при $r \rightarrow +0$;
- в) функция $u(x)$ имеет полный дифференциал в точке x_0 .

В частности, принимая во внимание условие в), получаем следующий результат, содержащий в себе упомянутую во введении теорему Краля [3].

Следствие 3. Пусть $u(x)$ – функция, непрерывная в G и гармоническая на множестве $G \setminus u^{-1}(0)$, и пусть в каждой точке $x_0 \in u^{-1}(0)$ функция $u(x)$ имеет полный дифференциал. Тогда функция $u(x)$ гармонична в G .

Если функция $u(x)$ непрерывна в G и субгармонична на открытом множестве $G \setminus u^{-1}(0)$, то $u(x_0) \leq M_r u(x_0)$ для всех $x_0 \in G \setminus u^{-1}(0)$ и $r > 0$ таких, что $B(x_0, r) \subset G \setminus u^{-1}(0)$. Поэтому из теоремы 1 вытекает следующий аналог следствия 3 для субгармонических функций.

Следствие 4. Пусть $u(x)$ – функция, непрерывная в G и субгармоническая на множестве $G \setminus u^{-1}(0)$, и пусть в каждой точке $x_0 \in u^{-1}(0)$ функция $u(x)$ имеет полный дифференциал. Тогда функция $u(x)$ субгармонична в G .

В заключение отметим, что все приведенные выше результаты остаются в силе, если в их формулировках вместо усреднений по сферам рассматривать усреднения по шарам. Доказательства соответствующих утверждений претерпевают лишь минимальные и естественные видоизменения по сравнению с приведенными выше. Единственное отличие, на которое стоит обратить внимание, состоит в том, что нормирующий множитель $2n$ в определении верхнего и нижнего обобщенных параметров Лапласа должен быть заменен для случая усреднений по шарам на $2(n+2)$, чтобы на дважды непрерывно дифференцируемых функциях соответствующие величины совпали с их обычным лапласианом (см., например, [6, гл. 2, § 2]).

Список литературы

1. ФЕДОРОВ В. С. *Непрерывность и моногенность*. Изв. Иваново-Вознесенск. политехн. ин-та, **1** (1919), 45–56; 139–145.
2. RADÓ T. *Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit*. Math. Z., **20** (1924), 1–6.
3. KRÁL J. *Some extension results concerning harmonic functions*. J. London Math. Soc., **28:1** (1983), 62–70.

4. KRÁL J. *Extension results of the Radó type*. Rev. Roumaine Math. Pure Appl., **36** (1991), 71–76.
5. JUUTINEN P., LINDQVIST P. *Removability of a level set for solutions of quasilinear equations*. Commun. Part. Differ. Equ., **30:3** (2005), 305–321.
6. БРЕЛО М. *Основы классической теории потенциала*. Мир, М., 1964; пер. с франц.: BRELOT M. *Éléments de la théorie classique du potentiel*. Centre de Documetation Universitaire, Paris, 1961.
7. JUUTINEN P., LINDQVIST P., MANFREDI J. *On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasilinear equation*. SIAM J. Math. Anal., **33:3** (2001), 699–717.
8. ХЕЙМАН У., КЕННЕДИ П. *Субгармонические функции*. Мир, М., 1980; пер. с англ.: HAYMAN W.K., KENNEDY P. V., *Subharmonic functions*. Academic Press, New York, 1976.

АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ПОКРОВСКИЙ
Институт математики НАН Украины,
Киев, Украина
E-mail: pokrovsk@imath.kiev.ua

Поступило 12.05.2014

Applied Mathematics and Mathematical Physics
2015, Vol. 1, No. 1, 17–26

On the Removability of Level Sets for Subharmonic Functions

A. V. POKROVSKIY

Abstract. It is shown that the well-known Blaschke–Privalov local condition selecting subharmonic functions in a given Euclidean domain from the set of real-valued upper semi-continuous functions, which are defined in this domain and do not equal identically $-\infty$, can be replaced on the zero locus of the function under consideration by another a priori more weak local condition of the same type. As one of the corollaries of the main result of the paper we establish that any function continuous in a Euclidean domain and subharmonic on the complement of its zero locus is subharmonic in the whole domain under consideration if this functions has a total differential at each point of its zero locus.

Keywords: Radó theorem, subharmonic function, viscosity subharmonic function, Blaschke–Privalov condition.

MSC2010: 31B05



On a System of Equations Arising in Viscoelasticity Theory of Fractional Type*

TEODOR M. ATANACKOVIĆ, STEVAN PILIPOVIĆ, DUŠAN ZORIČA

Abstract. We study a system of partial differential equations with integer and fractional derivatives arising in the study of forced oscillatory motion of a viscoelastic rod. We propose a new approach, which considers a quotient of relations appearing in the constitutive equation instead of the constitutive equation itself. Both, a rod and a body, are assumed to have finite mass. The motion of a body is assumed to be translatory. The existence and the uniqueness for the corresponding initial-boundary value problem is proved within the spaces of functions and distributions. (This paper is the predecessor of Chapter 4 in [1]. Here we explain main ideas.)

Keywords: fractional derivative, distributed-order fractional derivative, fractional viscoelastic material, forced oscillations of a rod, forced oscillations of a body.

MSC2010: 74H05, 35R11, 45K05

1. Introduction

In this paper we study (1)–(4) derived in [2]. The system corresponds to a motion of a viscoelastic rod fixed at one end and of a body of finite mass attached to the other end. Also, an outer force, having the action line coinciding with the axis of the rod, acts at the body attached to the free end of a rod. In the dimensionless form the system of equations, initial and boundary conditions, describing such a motion, reads

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma(x, t) = \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t), \quad \varepsilon(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\int_0^1 \phi_\sigma(\gamma) {}_0D_t^\gamma \sigma(x, t) d\gamma = \int_0^1 \phi_\varepsilon(\gamma) {}_0D_t^\gamma \varepsilon(x, t) d\gamma, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0, \quad \sigma(x, 0) = 0, \quad \varepsilon(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad -\sigma(1, t) + F(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(1, t), \quad t > 0. \quad (4)$$

*The text submitted by the authors in English.

The research is supported by the Serbian Ministry of Education and Science (Projects: 174005 (T. M. Atanacković, D. Zoriča), 174024 (S. Pilipović)) and by the Secretariat for Science of Vojvodina (Project: 114-451-3605/2013 (D. Zoriča)).

Equation (1)₁ is the equation of motion for an arbitrary material point of a rod, σ denotes the stress at the point x at time t , u is a displacement, κ is a constant representing the ratio between the masses of a rod and a body. We use ε in (1)₂ as the axial strain of a rod, while in (2) ϕ_σ and ϕ_ε are known constitutive functions or distributions. The left Riemann–Liouville fractional derivative of order $\gamma \in (0, 1)$ is defined as (see [3]–[5])

$${}_0D_t^\gamma y(t) := \frac{d}{dt} \left(\frac{t^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} * y(t) \right), \quad t > 0,$$

where Γ is the Euler gamma function, $*$ is a convolution, i. e., if $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $\text{supp } f, g \subset [0, \infty)$, then $(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$, $t \in \mathbb{R}$. The initial conditions (3) correspond to an initially undeformed rod in the state of rest, and boundary conditions (4) correspond to a rod with one end fixed at $x = 0$ and with force F acting on the body attached to the other end (at $x = 1$). Initial-boundary value problem (1)–(4) represents a generalization of a problem of forced oscillations in the case of a light rod, presented in [6]. We refer to [2] for the details regarding the physical interpretation of system (1)–(4).

The main goal of our approach is treatment of a constitutive equation in an essentially new way. We analyze the quotient, denoted by M , of stress and strain after the application of the Laplace transform to (2). In this context M is a new important quantity which reflects the inherent properties of a material of a rod. Detailed mathematical analysis of M is given in the paper. We prove the existence and uniqueness of a solution to system (1)–(4). Our main results are stated as Theorems 1, 2.

Constitutive equations (2) were used earlier in [7]–[10] in special forms. Also, in the case $\phi_\sigma = \phi_\varepsilon$ equation (2) becomes the Hooke Law: $\sigma(x, t) = \varepsilon(x, t)$, $x \in [0, L]$, $t > 0$. We note that the constitutive functions or distributions ϕ_σ and ϕ_ε appearing in (2) must be taken in the accordance with the Second Law of Thermodynamics. If we take

$$\phi_\sigma(\gamma) := a^\gamma, \quad \phi_\varepsilon(\gamma) := b^\gamma, \quad \gamma \in (0, 1), \quad a, b > 0, \quad (5)$$

then there is restriction $a \leq b$ (see [11]–[13]). The special case when the constitutive distributions ϕ_σ and ϕ_ε are defined by

$$\phi_\sigma(\gamma) := \delta(\gamma) + a\delta(\gamma - \alpha), \quad \phi_\varepsilon(\gamma) := \delta(\gamma) + b\delta(\gamma - \alpha), \quad \alpha \in (0, 1), \quad 0 < a \leq b, \quad (6)$$

where δ is the Dirac distribution, gives a fractional generalization of the Zener constitutive equation for viscoelastic body. The waves in such type of materials were studied in [14]. If

$$\begin{aligned} \phi_\sigma(\gamma) &:= \delta(\gamma) + a\delta(\gamma - \alpha), \\ \phi_\varepsilon(\gamma) &:= b_0\delta(\gamma - \beta_0) + b_1\delta(\gamma - \beta_1) + b_2\delta(\gamma - \beta_2), \end{aligned} \quad (7)$$

where a, b_0, b_1, b_2 are positive constants and $0 < \alpha < \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 \leq 1$, then one obtains a constitutive equation proposed in [15]. The system (1)–(4), with the choice of constitutive functions and distributions (5) and (6), is considered in [2]. We refer to [16]–[18] for the detailed account on the use of fractional calculus in viscoelasticity,

while for the modelling the diffusion-wave phenomena within the theory of fractional calculus we refer to [19]–[27]. As far as the analysis of system (1)–(4) is concerned, we use the Laplace integral transform. Alternatively, one can use numerical approach, as done in [22].

We can apply our results in the study of behavior of solid-like materials (see [2]), when M takes the forms (9) and (10). The behavior of a fluid-like material is analyzed in [13], where we used constitutive distributions given by (7).

2. Assumption and main theorems and formal calculation

The Laplace transform of $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $f \equiv 0$ in $(-\infty, 0]$ and $|f(t)| \leq ce^{kt}$, $t > 0$, $k > 0$, is given by $\tilde{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$, $\text{Re } s > k$. We assume that it is analytically continued in domain $V = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Denote by \mathcal{S}'_+ the space of tempered distributions supported by $[0, \infty)$. Since tempered distributions \mathcal{S}'_+ are derivatives of polynomially bounded continuous functions supported by $[0, \infty)$, the Laplace transform of $f = D^\alpha F$ is given by $\tilde{f} = s^\alpha \tilde{F}$. We refer to [28] for the spaces of distributions $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ and \mathcal{S}'_+ , as well as for the Laplace and Fourier transforms in such spaces. Let $C([0, 1], \mathcal{S}'_+)$ to denote the space of continuous functions on $[0, 1]$ with values in \mathcal{S}'_+ . Let

$$M(s) := \sqrt{\frac{\int_0^1 \phi_\sigma(\gamma) s^\gamma d\gamma}{\int_0^1 \phi_\varepsilon(\gamma) s^\gamma d\gamma}}, \quad s \in V. \quad (8)$$

Note that for the cases of constitutive functions (5) and (6) M has the respective forms

$$M(s) = \sqrt{\frac{\ln(bs) as - 1}{\ln(as) bs - 1}}, \quad s \in V, \quad a \leq b, \quad (9)$$

$$M(s) = \sqrt{\frac{1 + as^\alpha}{1 + bs^\alpha}}, \quad s \in V, \quad \alpha \in (0, 1), \quad a \leq b. \quad (10)$$

Let M be of the form $M(s) = r(s) + ih(s)$, $s \in V$, as $|s| \rightarrow \infty$. Let s_n satisfy

$$f(s_n) = 0, \quad s_n = \xi_n + i\zeta_n \in V, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

where

$$f(s) := sM(s) \sinh(\kappa sM(s)) + \kappa \cosh(\kappa sM(s)), \quad s \in V. \quad (12)$$

We assume:

(A1) $\lim_{|s| \rightarrow \infty} r(s) = c_\infty > 0$, $\lim_{|s| \rightarrow \infty} h(s) = 0$, $\lim_{|s| \rightarrow 0} M(s) = c_0$ for some constants $c_\infty, c_0 > 0$;

(A2) there exists $n_0 > 0$, such that for $n > n_0$

$$\text{Im } s_n \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow h(s_n) \leq 0, \quad \text{Im } s_n \in \mathbb{R}_- \Rightarrow h(s_n) \geq 0,$$

where $h := \text{Im } M$;

(A3) there exist $s_0 > 0$ and $c > 0$ such that

$$\left| \frac{d}{ds}(sM(s)) \right| \geq c, \quad |s| > s_0;$$

(A4) for every $\gamma > 0$ there exist $\theta > 0$ and s_0 such that

$$|(s + \Delta s)M(s + \Delta s) - sM(s)| \leq \gamma, \quad \text{if } |\Delta s| < \theta, \quad |s| > s_0.$$

Instead of (A2) in Proposition 4 we consider:

(B) $|h(s)| \leq \frac{C}{|s|}$, $|s| > s_0$, for some constants $C > 0$ and $s_0 > 0$.

Note that (A1)–(A4) hold for M given by (9) and (10) (see [2]).

Theorem 1. *Let $F \in \mathcal{S}'_+$. Suppose that M satisfies assumptions (A1)–(A4). Then the unique solution u to (1)–(4) is given by*

$$u(x, t) = F(t) * P(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (13)$$

where

$$P(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left(\frac{M(qe^{-i\pi}) \sinh(\kappa x q M(qe^{-i\pi}))}{q M(qe^{-i\pi}) \sinh(\kappa q M(qe^{-i\pi})) + \kappa \cosh(\kappa q M(qe^{-i\pi}))} \right) \frac{e^{-qt}}{q} dq \\ + 2 \sum_{n=1}^\infty \operatorname{Re}(\operatorname{Res}(\tilde{P}(x, s)e^{st}, s_n)), \quad x \in [0, 1] \quad t > 0, \quad (14)$$

$$P(x, t) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t < 0.$$

The residues are given by

$$\operatorname{Res}(\tilde{P}(x, s)e^{st}, s_n) = \left[\frac{1}{s} \frac{M(s) \sinh(\kappa x s M(s))}{\frac{d}{ds} f(s)} e^{st} \right]_{s=s_n}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0. \quad (15)$$

Here $P \in C([0, 1] \times [0, \infty))$ and $u \in C([0, 1], \mathcal{S}'_+)$. In particular, if $F \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$, then u is continuous on $[0, 1] \times [0, \infty)$.

Theorem 2. *Let $F = H$, where H is the Heaviside function. Suppose that M satisfies assumptions (A1)–(A4). Then the unique solution σ_H to (1)–(4) is given by*

$$\sigma_H(x, t) = H(t) \\ + \frac{\kappa}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left(\frac{\cosh(\kappa x q M(qe^{i\pi}))}{q M(qe^{i\pi}) \sinh(\kappa q M(qe^{i\pi})) + \kappa \cosh(\kappa q M(qe^{i\pi}))} \right) \frac{e^{-qt}}{q} dq \\ + 2 \sum_{n=1}^\infty \operatorname{Re}(\operatorname{Res}(\tilde{\sigma}_H(x, s)e^{st}, s_n)), \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (16)$$

$$\sigma_H(x, t) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t < 0. \quad (17)$$

The residues are given by

$$\text{Res}(\sigma_H(x, s)e^{st}, s_n) = \left[\frac{\kappa \cosh(\kappa x s M(s))}{s \frac{d}{ds} f(s)} e^{st} \right]_{s=s_n}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0. \quad (18)$$

In particular, σ_H is continuous on $[0, 1] \times [0, \infty)$.

The assumption $F = H$ in Theorem 2 can be relaxed by requiring that F is locally integrable and

$$\tilde{F}(s) \approx \frac{1}{s^\alpha}, \quad |s| \rightarrow \infty,$$

for some $\alpha \in (0, 1)$. This condition ensures the convergence of the series in (16). If $F = \delta$, or even $F(t) = \frac{d^k}{dt^k} \delta(t)$, one uses σ_H , given by (16), in order to obtain σ as the $(k+1)$ -th distributional derivative:

$$\sigma = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \sigma_H \in C([0, 1], \mathcal{S}'_+).$$

We present the formal calculations, that are justified later. Applying formally the Laplace transform to (1)–(4), we obtain

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\sigma}(x, s) = \kappa^2 s^2 \tilde{u}(x, s), \quad \tilde{\varepsilon}(x, s) = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{u}(x, s), \quad x \in [0, 1], \quad s \in V, \quad (19)$$

$$\tilde{\sigma}(x, s) \int_0^1 \phi_\sigma(\gamma) s^\gamma d\gamma = \tilde{\varepsilon}(x, s) \int_0^1 \phi_\varepsilon(\gamma) s^\gamma d\gamma, \quad x \in [0, 1], \quad s \in V, \quad (20)$$

$$\tilde{u}(0, s) = 0, \quad \tilde{\sigma}(1, s) + s^2 \tilde{u}(1, s) = \tilde{F}(s), \quad s \in V. \quad (21)$$

By (20) and (8) we have

$$\tilde{\sigma}(x, s) = \frac{1}{M^2(s)} \tilde{\varepsilon}(x, s), \quad x \in [0, 1], \quad s \in V. \quad (22)$$

In order to obtain the displacement u , we use (19) and (22):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{u}(x, s) - (\kappa s M(s))^2 \tilde{u}(x, s) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad s \in V. \quad (23)$$

The solution of (23) is

$$\tilde{u}(x, s) = C_1(s) e^{\kappa x s M(s)} + C_2(s) e^{-\kappa x s M(s)}, \quad x \in [0, 1], \quad s \in V,$$

where C_1 and C_2 are arbitrary functions, which are determined from (21)₁ as $2C = C_1 = -C_2$. Thus,

$$\tilde{u}(x, s) = C(s) \sinh(\kappa x s M(s)), \quad x \in [0, 1], \quad s \in V. \quad (24)$$

By (8), (19)₂, (22) and (24) we have

$$\tilde{\sigma}(x, s) = C(s) \frac{\kappa s}{M(s)} \cosh(\kappa x s M(s)), \quad x \in [0, 1], \quad s \in V, \quad (25)$$

and by (24), (25) at $x = 1$, using (21)₂, we obtain

$$C(s) = \frac{M(s)\tilde{F}(s)}{s(sM(s) \sinh(\kappa s M(s)) + \kappa \cosh(\kappa s M(s)))}, \quad s \in V.$$

Therefore, the Laplace transforms of displacement (24) and stress (25) are

$$\tilde{u}(x, s) = \tilde{F}(s)\tilde{P}(x, s), \quad \tilde{\sigma}(x, s) = \tilde{F}(s)\tilde{Q}(x, s), \quad x \in [0, 1], \quad s \in V, \quad (26)$$

where

$$\tilde{P}(x, s) = \frac{1}{s} \frac{M(s) \sinh(\kappa x s M(s))}{sM(s) \sinh(\kappa s M(s)) + \kappa \cosh(\kappa s M(s))}, \quad x \in [0, 1], \quad s \in V, \quad (27)$$

$$\tilde{Q}(x, s) = \frac{\kappa \cosh(\kappa x s M(s))}{sM(s) \sinh(\kappa s M(s)) + \kappa \cosh(\kappa s M(s))}, \quad x \in [0, 1], \quad s \in V. \quad (28)$$

Applying the inverse Laplace transform to (26), we obtain u in the form (13), while by using $F = H$, i. e., $\tilde{F}(s) = \frac{1}{s}$, in (26) we obtain σ_H in the form (16), (17).

3. Basic results

3.1. Zeros of f

Proposition 3. *Assume (A1).*

(i) *Equation (11) has countably many solutions s_n , $n \in \mathbb{N}$, with properties*

$$s_n M(s_n) = i w_n, \quad \tan(\kappa w_n) = \frac{\kappa}{w_n}, \quad w_n \in \mathbb{R}, \quad w_n \neq 0. \quad (29)$$

In particular, complex conjugate \bar{s}_n also satisfies (11), $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *Positive (negative) solutions of $\tan(\kappa w_n) = \frac{\kappa}{w_n}$ satisfy $w_n \approx \frac{n\pi}{\kappa}$ ($w_n \approx -\frac{n\pi}{\kappa}$) as $n \rightarrow \infty$.*

Note $\text{Im } s_n \neq 0$ in (29), so all the solutions belong to V .

Proof. (i) The last part of (i) is trivial. By (11) and (12) we have

$$e^{2\kappa s M(s)} = \frac{sM(s) - \kappa}{sM(s) + \kappa}, \quad s \in V. \quad (30)$$

Put $sM(s) = v(s) + iw(s)$, $s \in V$. Then we have

$$e^{2\kappa v} = \frac{(v - \kappa)^2 + w^2}{(v + \kappa)^2 + w^2}. \quad (31)$$

Fix w and let $v < 0$. Then $e^{2\kappa v} < 1$ and $\frac{(v-\kappa)^2+w^2}{(v+\kappa)^2+w^2} > 1$. Now let $v > 0$. Then $e^{2\kappa v} > 1$ and $\frac{(v-\kappa)^2+w^2}{(v+\kappa)^2+w^2} < 1$. In both cases we have a contradiction, and we conclude that the solutions to (31) satisfy $v(s) = 0$. Thus, the solutions of (30) satisfy $sM(s) = iw(s)$, $s \in V$. Inserting this into (11), we obtain

$$\tan(\kappa w) = \frac{\kappa}{w}, \quad w \in \mathbb{R}, \quad (32)$$

so there are countably many values of w , denoted by w_n , $n \in \mathbb{N}$, satisfying equation (32). This gives (29).

(ii) Since $\frac{\kappa}{w_n}$ monotonically decreases to zero for all $w_n > 0$, by (29) we have

$$w_n \approx \frac{n\pi}{\kappa} \quad \left(w_n \approx -\frac{n\pi}{\kappa} \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Proposition 4. *Assume (A1), (A2), or (A3), (B). Then there exist $\xi_0 > 0$ and $n_0 \in \mathbb{N}$ so that the real part of s_n , $n \in \mathbb{N}$, denoted by ξ_n satisfies $\xi_n < \xi_0$, $n > n_0$. Moreover, if we assume additionally (A3), then the solutions s_n of (11) are of multiplicity one for $n > n_0$.*

Proof. Assume (A1) and (A2). By (29) we have

$$(\xi_n + i\zeta_n)(r(s_n) + ih(s_n)) \approx iw_n, \quad n > n_0.$$

This implies

$$\xi_n r(s_n) = \zeta_n h(s_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (33)$$

$$\xi_n h(s_n) + \zeta_n r(s_n) \approx w_n, \quad n > n_0. \quad (34)$$

Inserting (33) into (34), we obtain

$$\zeta_n \approx \frac{n\pi}{c_\infty \kappa}, \quad w_n \approx \frac{n\pi}{\kappa}, \quad n > n_0, \quad (35)$$

or

$$\zeta_n \approx -\frac{n\pi}{c_\infty \kappa}, \quad w_n \approx -\frac{n\pi}{\kappa}, \quad n > n_0. \quad (36)$$

In the case of (35), we have

$$\xi_n \approx \frac{\zeta_n}{c_\infty} h(s_n) \leq 0, \quad n > n_0,$$

since s_n belongs to the upper complex half-plane. In the case of (36), we have

$$\xi_n \approx \frac{\zeta_n}{c_\infty} h(s_n) \leq 0, \quad n > n_0,$$

since s_n belongs to the lower complex half-plane. Thus, in both cases $\xi_n \leq 0$ for sufficiently large n . Assume now (A1) and (B). This and (29) imply $s_n \approx i\frac{w_n}{c_\infty}$ for $n > n_0$. Thus, by (33) and (34) we obtain

$$|\xi_n| \leq \frac{|w_n|}{c_\infty^2} \frac{C}{|s_n|} \leq \frac{C}{c_\infty}, \quad n > n_0.$$

So, the real parts ξ_n of solutions s_n of (11) satisfy $\xi_n \in [-\frac{C}{c_\infty}, \frac{C}{c_\infty}]$, for $n > n_0$. This is even a stronger condition for the zeros, but it is not used further.

In order to prove that the solutions s_n , $n > n_0$, of f are of multiplicity one, we use (A3), differentiate (11) and obtain

$$\frac{df(s)}{ds} = ((1 + \kappa^2) \sinh(\kappa s M(s)) + \kappa s M(s) \cosh(\kappa s M(s))) \frac{d}{ds}(s M(s)), \quad s \in V.$$

Calculating the previous expression at s_n , we have that $\left| \frac{df(s)}{ds} \Big|_{s=s_n} \right|$ is different from zero by (A3).

3.2. Estimates of f

We assume (A1)–(A4). Let $R > 0$ and

$$D = D_R = \left\{ s = \rho e^{i\varphi} \mid \rho \leq R, \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \right\},$$

$$\Gamma = \Gamma_R = \left\{ s = R e^{i\varphi} \mid \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \right\}.$$

We denote by S the set of all solutions of (11) in D .

Lemma 5. *Let $\eta > 0$ and $D_\eta = \{s \in D \mid |s - s_j| > \eta, s_j \in S\}$. Then there exist $s_0 > 0$ and $p_\eta > 0$ such that*

$$|f(s)| > p_\eta, \quad \text{if } s \in D_\eta, \quad |s| > s_0. \quad (37)$$

So, in the sequel that certain assertions hold for $n > n_0$. This implies that we consider domains in D where $|s| > s_0$ and s_0 depends on n_0 .

Proof. If (37) does not hold, then there exists a sequence $\{\tilde{s}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in D_\eta$ such that

$$|f(\tilde{s}_n)| = \eta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (38)$$

This implies $|\operatorname{Re}(\tilde{s}_n M(\tilde{s}_n))| \rightarrow 0$, $|\operatorname{Im}(\tilde{s}_n M(\tilde{s}_n))| \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. We show that there exist $N \in \mathbb{N}$ and $s_N \in S$, so that

$$|\tilde{s}_N - s_N| \leq \eta \quad (39)$$

and this is a contradiction. Let $\delta < \frac{\pi}{c_\infty \kappa}$ and $\delta \ll \eta$. We know that for $s_n \in S$, $n > n_0$, there holds

$$\operatorname{Re}(s_n M(s_n)) = 0, \quad \left| \operatorname{Im}(s_n M(s_n)) - \frac{n\pi}{c_\infty \kappa} \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Let

$$I_n = \left(\frac{n\pi}{c_\infty \kappa} + \frac{\delta}{2}, \frac{(n+1)\pi}{c_\infty \kappa} - \frac{\delta}{2} \right),$$

$$I_{n+1} = \left(\frac{(n+1)\pi}{c_\infty \kappa} + \frac{\delta}{2}, \frac{(n+2)\pi}{c_\infty \kappa} - \frac{\delta}{2} \right), \quad \dots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Since $|\operatorname{Re}(\tilde{s}_n M(\tilde{s}_n))| \rightarrow 0$, it follows that

$$|\operatorname{Im}(\tilde{s}_n M(\tilde{s}_n))| \in I_n \cup I_{n+1} \cup \dots, \quad n > n_0.$$

Put $\kappa \tilde{s}_n M(\tilde{s}_n) = t_n + i\tau_n$, $n \in \mathbb{N}$. Then

$$\begin{aligned} 2\kappa f(\tilde{s}_n) &= t_n(e^{t_n} - e^{-t_n}) \cos \tau_n - \tau_n(e^{t_n} + e^{-t_n}) \sin \tau_n + \kappa^2(e^{t_n} + e^{-t_n}) \cos \tau_n \\ &\quad + i(t_n(e^{t_n} + e^{-t_n}) \sin \tau_n + \tau_n(e^{t_n} - e^{-t_n}) \cos \tau_n \\ &\quad + \kappa^2(e^{t_n} - e^{-t_n}) \sin \tau_n). \end{aligned} \quad (40)$$

Let $\tau_n = k_n \pi + r_n$, $r_n < \pi$, where k_n , $n \in \mathbb{N}$, is an increasing sequence of natural numbers. We show that r_n must have a subsequence tending to zero, which gives (39), i.e., a contradiction with $\tilde{s}_n \in D_\eta$.

Let us assume that r_n does not have a subsequence converging to zero, that is $r_n > \frac{\delta}{2}$, $n > n_0$. Since $t_n \rightarrow 0$, by dropping the summands tending to zero in (40), one obtains ($n \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} |2\kappa f(\tilde{s}_n)| &\sim |-\tau_n(e^{t_n} + e^{-t_n}) \sin \tau_n + \kappa^2(e^{t_n} + e^{-t_n}) \cos \tau_n| \\ &\sim | -k_n \pi (e^{t_n} + e^{-t_n}) \sin r_n - r_n (e^{t_n} + e^{-t_n}) \sin r_n \\ &\quad + \kappa^2(e^{t_n} + e^{-t_n}) \cos r_n|. \end{aligned}$$

Thus, the first summand on the right-hand side tends to infinity, while the second and the third one are bounded. This is in contradiction with (38), and the lemma is proved.

Proposition 6. (i) *Let D_0 be a subdomain of D . If $|\operatorname{Re}(sM(s))| > d$, $s \in D_0 \subset D$, then there exist $c > 0$ and $s_0 > 0$ such that*

$$|f(s)| \geq c|sM(s)| |\sinh(\kappa sM(s))|, \quad s \in D_0, \quad |s| > s_0.$$

(ii) *If $s \in D_\eta$, $|s| > s_0$ (see Lemma 5), then $|f(s)| \geq p_\eta$.*

In the case (ii) condition $|\operatorname{Re}(sM(s))| \leq d$ is not assumed, although we use this in (ii). Actually, it is a consequence of Lemma 5.

Proof. The proposition (i) follows from the fact that $sM(s) \sinh(\kappa sM(s))$ tends faster to the infinity than $\cosh(\kappa sM(s))$ when $|s| \rightarrow \infty$, $s \in D_0$. So, for some $c > 0$ and $|s| > s_0$

$$|f(s)| \geq |sM(s)| |\sinh(\kappa sM(s))| - \kappa^2 |\cosh(\kappa sM(s))| \geq c|sM(s)| |\sinh(\kappa sM(s))|.$$

This implies the assertion.

We need one more estimate of f for the deformation of the circle arc Γ_R near the point of Γ_R which is close to some zero of f . We choose $\varepsilon > 0$ such that $\varepsilon < \frac{\theta}{2}$ (θ is from (A4)) and that the difference $|s_1 M(s_1) - s_2 M(s_2)| \leq \gamma$ implies

$$|\cosh(s_1 M(s_1)) - \cosh(s_2 M(s_2))| < \delta_1, \quad |\sinh(s_1 M(s_1)) - \sinh(s_2 M(s_2))| < \delta_1,$$

as we need in the proof of the next lemma (in (47)).

Lemma 7. (i) Let $0 < \varepsilon < \frac{\theta}{2}$. Then there exist $n_0 \in \mathbb{N}$ and $d > 0$ such that for $s_j \in S$

$$j > n_0, \quad \varepsilon < |s - s_j| \leq 2\varepsilon \Rightarrow \operatorname{Re}(sM(s)) > d. \quad (41)$$

(ii) There exist $\varepsilon > 0$ and $d > 0$ such that for $\varepsilon < |s - s_n| \leq 2\varepsilon$, $s_n \in S$ and $|s| > s_0$

$$|\operatorname{Re}(sM(s))| > d$$

and

$$|f(s)| \geq c|sM(s)| |\sinh(\kappa sM(s))|, \quad \varepsilon < |s - s_n| \leq 2\varepsilon, \quad s_n \in S, \quad |s| > s_0.$$

(iii) Let $|s - s_n| > 2\varepsilon$, $s_n \in S$, $|s| > s_0$ and d, ε, c be as in (ii).

a) If $|\operatorname{Re}(sM(s))| > d$, then $|f(s)| \geq c|sM(s)| |\sinh(\kappa sM(s))|$.

b) If $|\operatorname{Re}(sM(s))| \leq d$, then $|f(s)| > p_{2\varepsilon}$ (see the comment before the proof of Proposition 6).

Proof. We know that

$$|s_{n+1} - s_n| \geq |\operatorname{Im}(s_{n+1} - s_n)| \approx \frac{\pi}{c_\infty \kappa} > \frac{\pi}{2c_\infty \kappa}, \quad n > n_0.$$

This implies that the balls $L(s_j, 2\varepsilon)$ are disjoint for $j > n_0$. Let $j > n_0$ and $\varepsilon < |s - s_j| \leq 2\varepsilon$. By the Taylor formula we have

$$|f(s) - f(s_j)| = \left| \frac{df(\bar{s})}{ds} \right| |s - s_j| > \varepsilon \left| \frac{df(\bar{s} - s_j)}{ds} \right|, \quad \varepsilon < |\bar{s}| \leq 2\varepsilon. \quad (42)$$

So, with n_0 large enough we have $|s| > s_0$ so that (A3) implies

$$\left| \frac{d}{ds}(sM(s)) \right| \geq c, \quad |s| > s_0.$$

We assume

$$j > n_0, \quad |s| > s_0, \quad \varepsilon < |s - s_j| \leq 2\varepsilon, \quad \varepsilon < |\bar{s}| \leq 2\varepsilon. \quad (43)$$

By (43) we have

$$\begin{aligned} \left| \frac{df(\bar{s})}{ds} \right| &= |(1 + \kappa^2) \sinh(\kappa \bar{s}M(\bar{s})) + \kappa \bar{s}M(\bar{s}) \cosh(\kappa \bar{s}M(\bar{s}))| \left| \left[\frac{d}{ds}(sM(s)) \right]_{s=\bar{s}} \right| \\ &\geq c(\kappa |\bar{s}M(\bar{s})| |\cosh(\kappa \bar{s}M(\bar{s}))| - (1 + \kappa^2) |\sinh(\kappa \bar{s}M(\bar{s}))|), \end{aligned} \quad (44)$$

and

$$|f(s)| \leq |sM(s)| |\sinh(\kappa sM(s))| + \kappa |\cosh(\kappa sM(s))|. \quad (45)$$

Thus, inequations (44), (45) with (43) in (42) imply

$$\begin{aligned} &|sM(s)| |\sinh(\kappa sM(s))| + \kappa |\cosh(\kappa sM(s))| \\ &> \varepsilon c(\kappa |\bar{s}M(\bar{s})| |\cosh(\kappa \bar{s}M(\bar{s}))| - (1 + \kappa^2) |\sinh(\kappa \bar{s}M(\bar{s}))|). \end{aligned} \quad (46)$$

The final part of the proof is to show that (46) implies that there exists d such that (41) holds if (43) is satisfied. Contrary to (41), assume that there exist sequences \tilde{s}_n , s_{j_n} and $d_n \rightarrow 0$ such that

$$|\operatorname{Re}(\tilde{s}_n)M(\tilde{s}_n)| \leq d_n, \quad \text{if } \varepsilon < |\tilde{s}_n - s_{j_n}| \leq 2\varepsilon, \quad n > n_0.$$

Since \tilde{s}_n , $n > n_0$ satisfy (43), by (46) we have

$$\begin{aligned} & |\tilde{s}_n M(\tilde{s}_n)| |\sinh(\kappa \tilde{s}_n M(\tilde{s}_n))| + \kappa |\cosh(\kappa \tilde{s}_n M(\tilde{s}_n))| \\ & > \varepsilon c (\kappa |\bar{s}_n M(\bar{s}_n)| |\cosh(\kappa \bar{s}_n M(\bar{s}_n))| - (1 + \kappa^2) |\sinh(\kappa \bar{s}_n M(\bar{s}_n))|). \end{aligned} \quad (47)$$

The second part on the right-hand side tends to zero. Note that $\kappa |\cosh(\kappa \tilde{s}_n M(\tilde{s}_n))|$ cannot majorize $\varepsilon c \kappa |\bar{s}_n M(\bar{s}_n)| |\cosh(\kappa \bar{s}_n M(\bar{s}_n))|$. So, in (47) the leading terms on both sides are the first ones (with $\tilde{s}_n M(\tilde{s}_n)$ and $\bar{s}_n M(\bar{s}_n)$), and we neglect the second terms on both sides of (47). It follows that

$$|\tilde{s}_n M(\tilde{s}_n)| |\sinh(\kappa \tilde{s}_n M(\tilde{s}_n))| \geq c_0 |\bar{s}_n M(\bar{s}_n)| |\cosh(\kappa \bar{s}_n M(\bar{s}_n))|. \quad (48)$$

In the domain (43) by formula (48) we choose γ and ε so that, with suitable δ_1 and c_1 , (47) implies

$$|\sinh(\kappa \tilde{s}_n M(\tilde{s}_n))| > c_1 |\cosh(\kappa \bar{s}_n M(\bar{s}_n))|.$$

However, this leads to a contradiction, since $|\sinh(\kappa \tilde{s}_n M(\tilde{s}_n))| \rightarrow 0$, while $|\cosh(\kappa \bar{s}_n M(\bar{s}_n))|$ is close to one, under the assumptions. This proves (i).

Let η in Lemma 5 be equal to 2ε of (i). We obtain that (i) and Proposition 6 imply (ii) and (iii).

Corollary 8. (i) *There exist $\varepsilon > 0$ and $C > 0$ such that for $\varepsilon < |s - s_n| \leq 2\varepsilon$, $s_n \in S$ and $|s| > s_0$, we have*

$$\begin{aligned} \frac{|sM(s) \sinh(\kappa x s M(s))|}{|f(s)|} &\leq \frac{1}{c} e^{-\kappa(1-x) \operatorname{Re}(sM(s))} \leq C, \\ \frac{|\cosh(\kappa x s M(s))|}{|f(s)|} &\leq \frac{1}{c c_\infty} \frac{1}{|s|} e^{-\kappa(1-x) \operatorname{Re}(sM(s))} \leq \frac{C}{|s|}. \end{aligned}$$

(ii) *For $|s - s_n| > 2\varepsilon$, $s_n \in S$, $|s| > s_0$, we have*

$$\frac{|sM(s) \sinh(\kappa x s M(s))|}{|f(s)|} \leq \frac{1}{c} e^{-\kappa(1-x) \operatorname{Re}(sM(s))} \leq C,$$

or

$$\frac{|sM(s) \sinh(\kappa x s M(s))|}{|f(s)|} \leq \frac{d e^{\kappa x d} |1 - e^{-2\kappa x s M(s)}|}{p_{2\varepsilon}} \leq C,$$

and

$$\frac{|\cosh(\kappa x s M(s))|}{|f(s)|} \leq \frac{1}{c c_\infty} \frac{1}{|s|} e^{-\kappa(1-x) \operatorname{Re}(sM(s))} \leq \frac{C}{|s|},$$

or

$$\frac{|\cosh(\kappa x s M(s))|}{|f(s)|} \leq \frac{e^{\kappa x d} |1 + e^{-2\kappa x s M(s)}|}{p_{2\varepsilon}} \leq C.$$

Note that for the estimate of both $\frac{|sM(s) \sinh(\kappa x s M(s))|}{|f(s)|}$ and $\frac{|\cosh(\kappa x s M(s))|}{|f(s)|}$ we use (i) and (ii) of Lemma 7 and that in the case $|\operatorname{Re}(sM(s))| > d$ there exists $c > 0$ such that

$$|\cosh(\kappa x s M(s))| \leq c |\sinh(\kappa x s M(s))|, \quad |s| \rightarrow \infty.$$

4. Proofs of Theorems

Proof of Theorem 1. We calculate $P(x, t)$, $x \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}$, by the integration over the contour given in Fig. 1. Small inside or outside half-circles, depending on

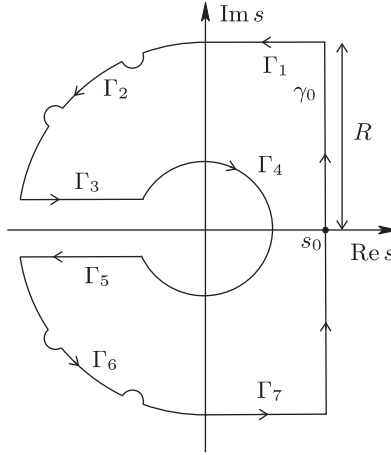


Fig. 1. Integration contour Γ

the zeros of f near Γ_2 and Γ_6 , have radius ε determined in Corollary 8. The Cauchy residues theorem yields

$$\oint_{\Gamma} \tilde{P}(x, s) e^{st} ds = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Res}(\tilde{P}(x, s) e^{st}, s_n) + \operatorname{Res}(\tilde{P}(x, s) e^{st}, \bar{s}_n)), \quad (49)$$

where $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_7 \cup \gamma_0$, so that poles of \tilde{P} lie inside the contour Γ . First we show that the series of residues in (14) is real-valued and convergent. Proposition 4 implies that the poles s_n , $n \in \mathbb{N}$, of \tilde{P} , given by (27), are simple for sufficiently large n . Then the residues in (49) can be calculated using (15) as

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(\tilde{P}(x, s) e^{st}, s_n) &= \left[\frac{M(s) \sinh(\kappa x s M(s))}{(1 + \kappa^2) \sinh(\kappa s M(s)) + \kappa s M(s) \cosh(\kappa s M(s))} \right]_{s=s_n} \\ &\quad \times \left[\frac{e^{st}}{s \frac{d}{ds}(sM(s))} \right]_{s=s_n}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Substituting (29) in (50), one obtains ($x \in [0, 1]$, $t > 0$)

$$\operatorname{Res}(\tilde{P}(x, s) e^{st}, s_n) = \frac{w_n \sin(\kappa w_n x)}{(1 + \kappa^2) \sin(\kappa w_n) + \kappa w_n \cos(\kappa w_n)} \frac{e^{s_n t}}{[s^2 \frac{d}{ds}(sM(s))]_{s=s_n}}.$$

Proposition 4 implies

$$|e^{s_n t}| < \bar{c}e^{at}, \quad t > 0,$$

for some $a \in \mathbb{R}$. Since $|s_n| \approx \frac{n\pi}{c_\infty \kappa}$ and $|w_n| \approx \frac{n\pi}{\kappa}$, $n > n_0$, it follows that

$$|\text{Res}(\tilde{P}(x, s)e^{st}, s_n)| \leq \frac{\bar{c}}{\kappa} \frac{e^{at}}{|[s^2 \frac{d}{ds}(sM(s))]_{s=s_n}|}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0.$$

Now we use assumption (A3). This implies that there exists $K > 0$ such that

$$|\text{Res}(\tilde{P}(x, s)e^{st}, s_n)| \leq K \frac{e^{at}}{n^2}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0.$$

This suggests that the series of residues in (49), i. e., in (14), is convergent.

We calculate the integral over Γ in (49). We consider the integral along contour $\Gamma_1 = \{s = p + iR \mid p \in [0, s_0], R > 0\}$, where R is defined as follows. Take n_0 so that $|\text{Im } s_n - \frac{n\pi}{c_\infty \kappa}| < \eta$, where $0 < \eta \ll \frac{1}{2} \frac{\pi}{c_\infty \kappa}$, for $n > n_0$, and put

$$R = \frac{n\pi}{c_\infty \kappa} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{c_\infty \kappa}, \quad n > n_0. \quad (51)$$

By (27) and Corollary 8 we have

$$|\tilde{P}(x, s)| \leq \frac{C}{|s|^2}, \quad |s| \rightarrow \infty. \quad (52)$$

Using (52), we calculate the integral over Γ_1 as

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma_1} \tilde{P}(x, s)e^{st} ds \right| \leq C \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{s_0} \frac{1}{R^2} e^{pt} dp = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0.$$

Similar arguments give

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma_7} \tilde{P}(x, s)e^{st} ds \right| = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0.$$

We consider the integral along contour Γ_2 . The contour Γ_2 consists of parts of contour $\Gamma_R = \{s = Re^{i\phi} \mid \phi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]\}$ and of finite number of contours $\Gamma_\varepsilon = \{|s - s_k| = \varepsilon \mid f(s_k) = 0\}$ encircling the poles s_k , either from inside, or from outside of Γ_R . (Note that the distances between poles are greater than ε , $n > n_0$.) More precisely, if a pole is inside of D_R , then Γ_ε is outside of D_R , and if a pole is outside of D_R , then Γ_ε is inside of D_R . By (52) the integral over the contour Γ_2 becomes

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma_2} \tilde{P}(x, s)e^{st} ds \right| \leq C \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{R} e^{Rt \cos \phi} d\phi = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0,$$

since $\cos \phi \leq 0$ for $\phi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Similar arguments give

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma_6} \tilde{P}(x, s)e^{st} ds \right| = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0.$$

Consider the integral along Γ_4 . Let $|s| \rightarrow 0$. Then, by (A1), $sM(s) \rightarrow 0$, $\cosh(\kappa sM(s)) \rightarrow 1$, $\sinh(\kappa sM(s)) \rightarrow 0$ and $\sinh(\kappa x sM(s)) \approx \kappa x sM(s)$. Hence, from (27) we have

$$|\tilde{P}(x, s)| \approx x|M(s)|^2 \approx c_0^2 x, \quad x \in [0, 1], \quad s \in V, \quad |s| \rightarrow 0. \quad (53)$$

The integration along contour Γ_4 gives

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{\Gamma_4} \tilde{P}(x, s) e^{st} ds \right| \leq c_0^2 x \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} r e^{rt \cos \phi} d\phi = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0,$$

where we used (53).

Integrals along Γ_3 , Γ_5 and γ_0 give ($x \in [0, 1]$, $t > 0$)

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_3} \tilde{P}(x, s) e^{st} ds \\ &= \int_0^\infty \frac{M(qe^{i\pi}) \sinh(\kappa x q M(qe^{i\pi})) e^{-qt}}{q(qM(qe^{i\pi}) \sinh(\kappa q M(qe^{i\pi})) + \kappa \cosh(\kappa q M(qe^{i\pi})))} dq, \\ & \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_5} \tilde{P}(x, s) e^{st} ds \\ &= - \int_0^\infty \frac{M(qe^{-i\pi}) \sinh(\kappa x q M(qe^{-i\pi})) e^{-qt}}{q(qM(qe^{-i\pi}) \sinh(\kappa q M(qe^{-i\pi})) + \kappa \cosh(\kappa q M(qe^{-i\pi})))} dq, \\ & \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_0} \tilde{P}(x, s) e^{st} ds = 2\pi i P(x, t). \end{aligned} \quad (54)$$

We note that (54) is valid if the inversion of the Laplace transform exists, which is true since all the singularities of \tilde{P} are left from the line γ_0 and the estimates on \tilde{P} over γ_0 imply the convergence of the integral. Summing up, we obtain the left-hand side of (49) and finally P in the form given by (14). Analyzing

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left(\frac{M(qe^{-i\pi}) \sinh(\kappa x q M(qe^{-i\pi}))}{qM(qe^{-i\pi}) \sinh(\kappa q M(qe^{-i\pi})) + \kappa \cosh(\kappa q M(qe^{-i\pi}))} \right) \frac{e^{-qt}}{q} dq, \\ & 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(\operatorname{Res}(\tilde{P}(x, s) e^{st}, s_n)), \end{aligned}$$

we conclude that both terms appearing in (14) are continuous functions on $t \in [0, \infty)$, for every $x \in [0, 1]$. The continuity also holds with respect to $x \in [0, 1]$ if we fix $t \in [0, \infty)$. Thus, u is a continuous function on $[0, 1] \times [0, \infty)$. From the uniqueness of the Laplace transform it follows that u is unique. Since F belongs to \mathcal{S}'_+ , it follows that

$$u(x, \cdot) = F(\cdot) * P(x, \cdot) \in \mathcal{S}'_+$$

for every $x \in [0, 1]$ and $u \in C([0, 1], \mathcal{S}'_+)$. Moreover, if $F \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$, then $u \in C([0, 1] \times [0, \infty))$, since P is continuous.

Proof of Theorem 2. By (26) and (28) we obtain

$$\tilde{\sigma}_H(x, s) = \frac{1}{s} \frac{\kappa \cosh(\kappa x s M(s))}{s M(s) \sinh(\kappa s M(s)) + \kappa \cosh(\kappa s M(s))}, \quad x \in [0, 1], \quad s \in V. \quad (55)$$

We calculate $\sigma_H(x, t)$, $x \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}$, by the integration over the same contour from Fig. 1. The Cauchy residues theorem gives

$$\oint_{\Gamma} \tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st} ds = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} (\text{Res}(\tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st}, s_n) + \text{Res}(\tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st}, \bar{s}_n)), \quad (56)$$

so that poles of \tilde{Q} lie inside the contour Γ .

We show that the series of residues in (16) is convergent and real-valued. By Proposition 4 the poles s_n , $n \in \mathbb{N}$, are simple for sufficiently large n . Then, for $n > n_0$, the residues in (56) can be calculated using (18) as

$$\begin{aligned} \text{Res}(\tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st}, s_n) &= \left[\frac{\kappa \cosh(\kappa x s M(s))}{(1 + \kappa^2) \sinh(\kappa s M(s)) + \kappa s M(s) \cosh(\kappa s M(s))} \right]_{s=s_n} \\ &\quad \times \left[\frac{e^{st}}{s \frac{d}{ds}(s M(s))} \right]_{s=s_n}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0. \end{aligned}$$

By the use of (29) we obtain ($x \in [0, 1]$, $t > 0$)

$$\text{Res}(\tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st}, s_n) = \frac{\kappa \cos(\kappa w_n x)}{(1 + \kappa^2) \sin(\kappa w_n) + \kappa w_n \cos(\kappa w_n)} \frac{e^{s_n t}}{[s \frac{d}{ds}(s M(s))]_{s=s_n}}.$$

Proposition 4 implies

$$|e^{s_n t}| < \bar{c} e^{at}, \quad t > 0,$$

for some $a \in \mathbb{R}$. Since $|s_n| \approx \frac{n\pi}{c_\infty \kappa}$ and $|w_n| \approx \frac{n\pi}{\kappa}$, $n > n_0$, it follows that

$$|\text{Res}(\tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st}, s_n)| \leq \frac{\kappa}{n\pi} \frac{\bar{c} e^{at}}{[s \frac{d}{ds}(s M(s))]_{s=s_n}}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad n > n_0.$$

By (A3) there exists $K > 0$ such that

$$|\text{Res}(\tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st}, s_n)| \leq K \frac{e^{at}}{n^2}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad n > n_0.$$

This implies that the series of residues in (56) (i. e., in (16)) is convergent.

Let us calculate the integral over Γ in (56). Consider the integral along contour

$$\Gamma_1 = \{s = p + iR \mid p \in [0, s_0], R > 0\},$$

where R is defined by (51). We use estimates

$$\frac{|\cosh(\kappa x s M(s))|}{|f(s)|} \leq \frac{C}{|s|}, \quad \text{or} \quad \frac{|\cosh(\kappa x s M(s))|}{|f(s)|} \leq C, \quad (57)$$

from Corollary 8 in equation (55). By (57) we calculate the integral over Γ_1 as ($x \in [0, 1]$, $t > 0$)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma_1} \tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st} ds \right| \leq C \kappa \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{s_0} \frac{1}{R^2} e^{pt} dp = 0,$$

or

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma_1} \tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st} ds \right| \leq C \kappa \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{s_0} \frac{1}{R} e^{pt} dp = 0.$$

Similar arguments are valid for the integral along Γ_7 :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma_7} \tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st} ds \right| = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0.$$

Consider the integral along contour Γ_2 , defined as in the proof of Theorem 1. With (57) we have that the integral over Γ_2 becomes ($x \in [0, 1]$, $t > 0$)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma_2} \tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st} ds \right| \leq C \kappa \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{R} e^{Rt \cos \phi} d\phi = 0,$$

or

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma_2} \tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st} ds \right| \leq C \kappa \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{Rt \cos \phi} d\phi = 0,$$

since $\cos \phi \leq 0$ for $\phi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Similar arguments give

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma_6} \tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st} ds \right| = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0.$$

Consider the integral along contour Γ_4 . Let $|s| \rightarrow 0$. Then, by (A1), $sM(s) \rightarrow 0$, $\cosh(\kappa s M(s)) \rightarrow 1$, $\sinh(\kappa s M(s)) \rightarrow 0$ and $\cosh(\kappa x s M(s)) \rightarrow 1$. Hence, we have $s\sigma_H(x, s) \approx 1$ from (55). The integration along contour Γ_4 gives

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_4} \tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st} ds = i \int_{\pi}^{-\pi} d\phi = -2\pi i, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0. \quad (58)$$

Integrals along Γ_3 , Γ_5 and γ_0 give ($x \in [0, 1]$, $t > 0$)

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_3} \tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st} ds \\ &= - \int_0^\infty \frac{\kappa \cosh(\kappa x q M(qe^{i\pi})) e^{-qt}}{q(qM(qe^{i\pi}) \sinh(\kappa q M(qe^{i\pi})) + \kappa \cosh(\kappa q M(qe^{i\pi})))} dq, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_5} \tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st} ds \\ &= \int_0^\infty \frac{\kappa \cosh(\kappa x q M(qe^{-i\pi})) e^{-qt}}{q(qM(qe^{-i\pi}) \sinh(\kappa q M(qe^{-i\pi})) + \kappa \cosh(\kappa q M(qe^{-i\pi})))} dq, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_0} \tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st} ds = 2\pi i \sigma_H(x, t). \quad (61)$$

As in the proof of Theorem 1, we have that (61) is valid if the inversion of the Laplace transform exists. This is true since all the singularities of $\tilde{\sigma}_H$ are left from the line γ_0 and appropriate estimates on $\tilde{\sigma}_H$ are satisfied. Adding (58)–(61), we obtain the left-hand side of (56) and finally σ_H in the form given by (16).

Function σ_H is a sum of three addends: H and

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left(\frac{\cosh(\kappa x q M(qe^{i\pi}))}{qM(qe^{i\pi}) \sinh(\kappa q M(qe^{i\pi})) + \kappa \cosh(\kappa q M(qe^{i\pi}))} \right) \frac{e^{-qt}}{q} dq, \\ & 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(\operatorname{Res}(\tilde{\sigma}_H(x, s) e^{st}, s_n)). \end{aligned}$$

As in the case of Theorem 1, the explicit form of solution implies that σ_H is continuous on $[0, 1] \times [0, \infty)$.

5. The case of elastic rod

We treat the case of elastic rod separately. Then, for $s \in V$ we have $M(s) = 1$ ($r(s) = 1$ and $h(s) \equiv 0$) and, clearly, all the conditions (A1)–(A4) hold. By (27) and (28) we have

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{el}(x, s) &= \frac{1}{s} \frac{\sinh(\kappa s x)}{s \sinh(\kappa s) + \kappa \cosh(\kappa s)}, & x \in [0, 1], \quad s \in V, \\ \tilde{Q}_{el}(x, s) &= \frac{\kappa \cosh(\kappa s x)}{s \sinh(\kappa s) + \kappa \cosh(\kappa s)}, & x \in [0, 1], \quad s \in V. \end{aligned}$$

By Proposition 3 the zeros of

$$f_{el}(s) := s \sinh(\kappa s) + \kappa \cosh(\kappa s) = 0, \quad s \in V,$$

are of the form

$$s_n = iw_n, \quad \tan(\kappa w_n) = \frac{\kappa}{w_n}, \quad w_n \approx \pm \frac{n\pi}{\kappa}, \quad n \rightarrow \infty.$$

They are of multiplicity one for $n > n_0$. Moreover, all the zeros s_n , $n > n_0$, of f_{el} lie on the imaginary axis. This implies that the integrals over Γ_3 and Γ_5 (see Fig. 1), are equal to zero. So we have the following modifications.

Theorem 9. *Let $F \in \mathcal{S}'_+$. Then the unique solution u to (1)–(4) is given by*

$$u(x, t) = F(t) * P_{el}(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t > 0,$$

where

$$P_{el}(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\kappa w_n x) \sin(w_n t)}{w_n ((1 + \kappa^2) \sin(\kappa w_n) + \kappa w_n \cos(\kappa w_n))}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0.$$

In particular, $u \in C([0, 1], \mathcal{S}'_+)$. Moreover, if $F \in L^1_{loc}([0, \infty))$, then $u \in C([0, 1] \times [0, \infty))$.

Theorem 10. *Let $F = H$. Then the unique solution $\sigma_H^{(el)}$ to (1)–(4), is given by*

$$\sigma_H^{(el)}(x, t) = -2\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\kappa w_n x) \cos(w_n t)}{w_n ((1 + \kappa^2) \sin(\kappa w_n) + \kappa w_n \cos(\kappa w_n))}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0.$$

In particular, $\sigma_H^{(el)}$ is continuous on $[0, 1] \times [0, \infty)$.

References

1. ATANACKOVIĆ T. M., PILIPOVIĆ S., STANKOVIĆ B., ZORICA D. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Wave Propagation, Impact and Variational Principles*. Wiley-ISTE, London, 2014.
2. ATANACKOVIĆ T. M., PILIPOVIĆ S., ZORICA D. *Forced oscillations of a body attached to a viscoelastic rod of fractional derivative type*. *Internat. J. Eng. Sci.*, **64** (2013), 54–65.
3. KILBAS A. A., SRIVASTAVA H. M., TRUJILLO J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, 2006.
4. PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 1999.
5. SAMKO S. G., KILBAS A. A., MARICHEV O. I. *Fractional Integrals and Derivatives*. Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.
6. ATANACKOVIĆ T. M., BUDINCEVIĆ M., PILIPOVIĆ S. *On a fractional distributed-order oscillator*. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38** (2005), 6703–6713.
7. ATANACKOVIĆ T. M. *A generalized model for the uniaxial isothermal deformation of a viscoelastic body*. *Acta Mech.*, **159** (2002), 77–86.
8. ATANACKOVIĆ T. M., PILIPOVIĆ S., ZORICA D. *Distributed-order fractional wave equation on a finite domain. Stress relaxation in a rod*. *Internat. J. Eng. Sci.*, **49** (2011), 175–190.

9. ATANACKOVIĆ T. M., PILIPOVIĆ S., ZORICA D. *Distributed-order fractional wave equation on a finite domain: creep and forced oscillations of a rod*. Cont. Mech. Therm., **23** (2011), 305–318.
10. HARTLEY T. T., LORENZO C. F. *Fractional-order system identification based on continuous order-distributions*. Signal Proc., **83** (2003), 2287–2300.
11. ATANACKOVIĆ T. M. *A modified Zener model of a viscoelastic body*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, **14** (2002), 137–148.
12. ATANACKOVIĆ T. M. *On a distributed derivative model of a viscoelastic body*. Comptes Rendus Mécanique, **331** (2003), 687–692.
13. ATANACKOVIĆ T. M., KONJIK S., OPARNICA L.J., ZORICA D. *Thermodynamical restrictions and wave propagation for a class of fractional order viscoelastic rods*. Abstract Appl. Anal., **2011** (2011), paper ID975694, 32 pp.
14. KONJIK S., OPARNICA L.J., ZORICA D. *Waves in fractional Zener type viscoelastic media*. J. Math. Anal. Appl., **365** (2010), 259–268.
15. SCHIESEL H., FRIEDRICH CHR., BLUMEN A. *Applications to Problems in Polymer Physics and Rheology*, in: HILFER R. (ed.) *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Sci., Singapore, 2000.
16. MAINARDI F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. Imperial College Press, London, 2010.
17. ROSSIKHIN YU. A. *Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids*. Appl. Mech. Rev., **63** (2010), paper ID010701, 12 pp.
18. ROSSIKHIN YU. A., SHITIKOVA M. V. *Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results*. Appl. Mech. Rev., **63** (2010), paper ID010801, 52 pp.
19. ATANACKOVIĆ T. M., PILIPOVIĆ S., ZORICA D. *Time distributed-order diffusion-wave equation. I. Volterra type equation*. Proc. Roy. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci., **465** (2009), 1869–1891.
20. ATANACKOVIĆ T. M., PILIPOVIĆ S., ZORICA D. *Time distributed-order diffusion-wave equation. II. Applications of the Laplace and Fourier transformations*. Proc. Roy. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci., **465** (2009), 1893–1917.
21. CAMARGO R. F., CHIACCHIO A. O., CAPELAS DE OLIVEIRA E. *Differentiation to fractional orders and the fractional telegraph equation*. J. Math. Phys., **49** (2008), paper ID033505, 12 pp.
22. CHEN J., LIU F., LIU Q., CHEN X., ANH V., TURNER I., BURRAGE K. *Numerical simulation for the three-dimension fractional sub-diffusion equation*. Appl. Math. Modelling, **38**:15–16 (2014), 3695–3705.
23. EIDELMAN S. D., KOCHUBEI A. N. *Cauchy problem for fractional diffusion equations*. J. Differ. Equ., **199** (2004), 211–255.
24. HANYGA A. *Multidimensional solutions of time-fractional diffusion-wave equations*. Proc. Roy. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci., **458** (2002), 933–957.
25. KOCHUBEI A. N. *Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion*. J. Math. Anal. Appl., **340** (2008), 252–281.

26. MAINARDI F., MURA A., GORENFLO R., STOJANOVIC M. *The two forms of fractional relaxation of distributed order*. J. Vibration and Control, **13** (2007), 1249–1268.
27. MAINARDI F., PAGNINI G., GORENFLO R. *Some aspects of fractional diffusion equations of single and distributed order*. Appl. Math. Comput., **187** (2007), 295–305.
28. VLADIMIROV V. S. *Equations of Mathematical Physics*. Mir Publishers, Moscow, 1984.

TEODOR M. ATANACKOVIĆ
Department of Mechanics, Faculty of Technical Sciences,
University of Novi Sad, Novi Sad, Serbia
E-mail: atanackovic@uns.ac.rs

Received 12.05.2014

STEVAN PILIPOVIĆ
Department of Mechanics, Faculty of Technical Sciences,
University of Novi Sad, Novi Sad, Serbia
E-mail: stevan.pilipovic@dmi.uns.ac.rs

DUŠAN ZORIČA
Department of Mechanics, Faculty of Technical Sciences,
University of Novi Sad, Novi Sad, Serbia
E-mail: zorica@mi.sanu.ac.rs



УДК 519.688

Метод макрошагов для глобальной многопараметрической оптимизации мощных клистронов

А. Ю. БАЙКОВ

Представлено А. П. Сейраняном

Аннотация. Предложен метод оптимизации КПД мощных клистронов, представленный компьютерной моделью. При постановке задачи оптимизации используется редукция исходной векторной целевой функции к двухкомпонентной или к скалярной форме на основе понятия корректности главного значения. Метод оптимизации основан на последовательном проведении циклов оптимизации (макрошагов), каждый из которых включает оптимизацию методом зондирования и методом перебора на многомерном параллелепипеде. Рассматривается применение метода для оптимизации трех клистронов с различными базовыми конструкциями. Показано, что во всех рассмотренных случаях оптимизация позволяет получить оптимальный клистрон с КПД около 90%. Рассмотрены возможности обобщения предложенного метода на более широкий класс задач.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, многопараметрическая оптимизация, невыпуклое программирование, векторная целевая функция, КПД, клистрон.

1. Введение. Исходная постановка задачи

Клистроны – это мощные СВЧ-усилители, которые используются в радиолокации, в ускорительной технике, в дальней и космической радиосвязи. Кроме того, клистроны являются перспективными источниками энергии для СВЧ-энергетики и промышленных СВЧ-технологий (включая нанотехнологии).

Одна из проблем, которую необходимо решить в процессе развития каждого из указанных направлений, – это повышение КПД клистронов, причем для развития промышленных технологий и СВЧ-энергетики требуются клистроны с КПД не менее 80%, а желательно – близким к 100%.

В настоящее время усилия основных мировых фирм-производителей клистронов по повышению КПД привели к созданию единичных образцов приборов с КПД 70–75%. Дальнейшее увеличение КПД клистронов наталкивается на значительные трудности проектирования, в первую очередь на трудности математического моделирования и многопараметрической оптимизации.

Клистрон является многопараметрической системой [1], причем совокупность его конструктивных параметров можно разделить на две группы, которые будем далее называть *группа А* и *группа В*.

К группе *А* относятся параметры, которые выбираются априори исходя из технических требований к прибору и из общих физических соображений. Это основная частота, ускоряющее напряжение, полный ток, количество лучей (электронных пучков), количество резонаторов, рабочие гармоники, величины зазоров, характеристические сопротивления резонаторов, собственные добротности резонаторов, диаметры лучей, диаметры труб и т. д. Если заданы все параметры группы *А*, то будем говорить, что *задана базовая конструкция прибора*.

Группу *В* составляют все остальные параметры прибора, к которым относятся собственные частоты (расстройки) и добротности резонаторов, длины труб дрейфа, входная мощность. Группа *В* может быть сужена, если значения некоторых из перечисленных параметров должны быть зафиксированы в соответствии с техническими требованиями. Так, например, в узкополосном клистроне добротности промежуточных резонаторов могут быть заданы равными собственным добротностям и, соответственно, в группу *В* включаться не будут.

Основная задача первого этапа проектирования клистрона состоит в нахождении таких значений параметров группы *В*, которые обеспечат заданные или наилучшие выходные характеристики прибора. Основной выходной характеристикой клистрона является выходная СВЧ-мощность P_{out} или, в нормированном виде, КПД $\eta = \frac{P_{\text{out}}}{I_0 U_0}$, где I_0 – полный ток, а U_0 – ускоряющее напряжение.

Обычно клистрон должен работать не только на основной частоте f_0 , но и в некотором диапазоне частот от $f_1 = f_0 - \frac{\Delta f}{2}$ до $f_2 = f_0 + \frac{\Delta f}{2}$, где Δf – заданная ширина полосы. В этом случае основная выходная характеристика клистрона оказывается функцией $\eta = \eta(f)$, $f \in [f_1, f_2]$, которая называется *амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)* клистрона.

Основное требование к АЧХ и КПД в полосе должно быть как можно выше (либо не меньше некоторого заданного значения), кроме того, могут налагаться и дополнительные требования, связанные с равномерностью и симметрией АЧХ. Каждое из этих требований можно математически записать с помощью функционала $\Phi_i[\eta(f)]$, ставящего в соответствие функции $\eta(f)$ некоторое скалярное значение Φ_i . Например, минимальный КПД в полосе можно записать с помощью функционала

$$\Phi_1 = \min_{f \in [f_1, f_2]} (\eta(f)), \quad (1)$$

максимальный перепад КПД в полосе – с помощью функционала

$$\Phi_2 = \max_{f, f' \in [f_1, f_2]} (\eta(f) - \eta(f')), \quad (2)$$

а максимальную асимметрию – с помощью функционала

$$\Phi_3 = \max_{\Delta f' \in [0, \frac{\Delta f}{2}]} |\eta(f_0 + \Delta f') - \eta(f_0 - \Delta f')|. \quad (3)$$

Определенные выражениями (1)–(3) величины Φ_i , $i = 1, 2, 3$, будем рассматривать как компоненты некоторой векторной величины Φ , которую назовем *исходной целевой функцией*. Компоненту Φ_1 , определяемую выражением (1), назовем *главной компонентой целевой функции (ГКЦФ)*.

Задачу достижения максимального КПД клистрона можно сформулировать как задачу нахождения максимального значения ГКЦФ: $\Phi_1 \rightarrow \max$. Для остальных компонент целевой функции должны действовать ограничения $\Phi_i \leq \varphi_i$, где $i = \overline{2, n}$, n – размерность вектора Φ , φ_i – заданные значения.

Наборы параметров групп A и B будем рассматривать как соответствующие векторы размерностей m_A и m_B соответственно. Для дальнейшего изложения размерность вектора A несущественна, поэтому далее будем опускать индекс B и обозначать $m_B = m$. Для нахождения Φ как функции параметров клистрона, $\Phi = \Phi(A, B)$, необходимо знать зависимость $\eta(f, A, B)$. Такая зависимость должна быть получена в рамках какой-либо математической модели клистрона, реализованной в виде компьютерной программы. Для фиксированного базового клистрона ($A = \text{const}$) исходная целевая функция Φ становится алгоритмически заданной [2] функцией параметров группы B , т. е. $\Phi = \Phi(B)$.

Область определения функции $\Phi(B)$ в пространстве параметров B всегда можно ограничить априори некоторым многомерным параллелепипедом, получающимся из диапазонов допустимого изменения каждого из параметров оптимизации. Обозначим такую априорную область оптимизации через G_0 .

Задачу нахождения максимального КПД клистрона в рамках заданной базовой конструкции можно рассматривать как задачу оптимизации функции $\Phi(B)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(B) &\xrightarrow{B} \max, \\ \Phi_i(B) &\leq \varphi_i, \quad i = \overline{2, n}, \\ B &\in G_0, \quad \dim(B) = m, \end{aligned} \quad (4)$$

где компоненты Φ_i векторной целевой функции Φ определяются выражениями (1)–(3) или другими выражениями такого же типа.

Выражение (4) определяет исходную постановку задачи оптимизации, далее эта постановка будет несколько изменена с учетом особенностей целевой функции. Однако рассмотрим кратко математическую модель клистрона, определяющую функцию $\eta = \eta(f, A, B)$ и, соответственно, целевую функцию Φ .

2. Дискретно-аналитическая модель клистрона и программа KlypWin

Количество параметров группы B обычно находится в диапазоне $12 \div 16$, но иногда может превышать 20 и даже доходить до 30. Таким образом, задача (4) является задачей многопараметрической оптимизации, требующей проведения большого количества расчетов в течение ограниченного времени. При этом точность расчетов должна быть достаточно высокой. Эти условия приводят к весьма жестким требованиям к программному комплексу, моделирующему клистрон: вычислительное ядро этого комплекса должно сочетать высокое быстродействие с высокой точностью.

Построить вычислительное ядро, удовлетворяющее этим требованиям, можно только на основе математической модели, сочетающей высокую адекватность с высокой эффективностью. Примером такой модели является дискретно-аналитическая модель [3]–[7], основанная на усреднении пучка по сечению и последовательном расчете продольной трансформации пучка по аналитическим

формулам, представляющим решение самосогласованной задачи на одном пространственном шаге. Более подробно дискретно-математическая модель описана в [7].

Распределение СВЧ-поля в зазоре резонатора и в прилегающих участках труб дрейфа также представляется аналитическими формулами, выведенными в предположениях линейного (толстый торец трубы) или скачкообразного (тонкий торец трубы) распределения СВЧ-потенциала на цилиндрической поверхности, являющейся продолжением внутренней поверхности трубы в область зазора. Эти формулы дают правильное распределение СВЧ-поля как в области геометрического зазора, так и в асимптотике, при удалении вглубь трубы.

На основе дискретно-аналитической модели был разработан программный комплекс KlypWin. Помимо вычислительного ядра, моделирующего клистрон, в комплекс KlypWin входит блок многопараметрической оптимизации, входной и выходной интерфейсы, база данных клистронов и система управления проектами.

Один расчет КПД по программе KlypWin на стандартном ПК занимает от 0.2–0.3 с (средняя точность) до 1 с (высокая точность). Отметим, что, например, для известной численной программы AJDISK [8] соответствующие значения времени расчета составляют 30 с и 7–8 мин., т. е. на 2–3 порядка больше.

В качестве выходных данных, в зависимости от типа расчета, программа KlypWin может выводить графики АЧХ и амплитудных характеристик, фазовые траектории, зависимости СВЧ токов и напряжений резонаторов от частоты, графики времени прибытия частиц в заданную плоскость в зависимости от лагранжевой координаты t_0 (графики функции прибытия [7]), графики для скорости, графики плотности заряда в зависимости от времени и от лагранжевой координаты t_0 . Кроме того, в выходной интерфейс программы KlypWin встроены механизмы анализа и сравнения результатов с помощью наложения графиков друг на друга в одной координатной плоскости.

Все результаты, представленные далее, получены с помощью программы KlypWin.

3. Область корректности и окончательная постановка задачи

Назовем задачу (4) оптимизации клистрона по области G_0 *задачей глобальной оптимизации* и рассмотрим основные особенности этой задачи, из которых вытекают требования к методам ее решения.

Во-первых, как уже известно, количество параметров группы B , по которым следует проводить оптимизацию, может достигать 20 и более, т. е. оптимизация должна быть многопараметрической.

Во-вторых, как показывает значительный объем проведенных численных экспериментов, среднее значение ГКЦФ по области G_0 всегда практически неотлично от нуля. Это делает невозможным применение какого-либо метода зондирования (см. [2], [9]–[11]) непосредственно к области G_0 . Назовем значение некоторой величины, принимающей только положительные значения, *существенно ненулевым*, если оно превышает некоторую заданную погрешность ε . Обозначим область существенно ненулевых значений ГКЦФ через G_η . Близость к нулю среднего значения ГКЦФ означает малость меры области G_η по

сравнению с мерой области G_0 . Область G_η может иметь сложную структуру, в частности она может быть многосвязной. Поставленную задачу (4) можно было бы решить зондированием области G_η , но найти область G_η априори не представляется возможным.

В-третьих, область адекватности модели (обозначим эту область G_{mod}) также имеет сложную структуру. Если в процессе вычислений возникает ситуация, которая не описывается моделью, например отражение электронов, то программа сообщает об этом, устанавливая специальный индикатор в ненулевое значение. В этом случае будет получено некоторое значение ГКЦФ, однако это значение будет недостоверным, его нельзя использовать в процессе оптимизации.

В-четвертых, ГКЦФ является не аналитически, а алгоритмически заданной функцией, ее источником является компьютерная программа, использующая не только вычисление алгебраических функций, но и численные алгоритмы, которые могут не сойтись или дать большую вычислительную погрешность. Обозначим область, в которой результат работы вычислительной модели корректен, через G_{cal} . Область G_{cal} также является сложной и, вообще говоря, многосвязной. О выходе за пределы области программа также сообщает установкой соответствующего индикатора.

В-пятых, как показали численные эксперименты, запуск процедуры поиска локального экстремума из любой точки области G_η очень быстро приводит к нахождению локального экстремума вблизи этой точки. Это означает, что количество локальных экстремумов в области G_η очень велико, оценки показывают, что оно составляет $10^{12} \div 10^{14}$. Это, в свою очередь, означает, что найти глобальный экстремум в области G_0 , последовательно находя все локальные экстремумы, не представляется возможным.

Перечисленные особенности целевой функции и области оптимизации значительно усложняют задачу оптимизации. Несколько облегчают эту задачу следующие два обстоятельства:

1) ГКЦФ имеет простой физический смысл и фиксированный диапазон изменения $0 \leq \Phi_1 \leq \eta_{\text{max}} < 1$;

2) диапазоны и шаги изменения параметров также легко оценить из физических соображений, например, на основе известных погрешностей их измерения.

При проведении оптимизации необходимо реализовать ограничения на дополнительные (кроме ГКЦФ) компоненты целевой функции. В соответствии с выражением (4) все такие ограничения представляются в виде неравенств. Систему таких неравенств можно также рассматривать как выделение некоторой области G_{opt} в пространстве параметров.

Таким образом, задача оптимизации сводится к нахождению максимума ГКЦФ в области $G_{\text{corr}} = G_0 \cap G_\eta \cap G_{\text{cal}} \cap G_{\text{mod}} \cap G_{\text{opt}}$, которую будем называть *областью корректности*. Соответственно, точки, принадлежащие области G_{corr} , будем называть *корректными точками*, а точки, не принадлежащие этой области, – *некорректными*.

Несмотря на то, что область G_{corr} является сложной и, вообще говоря, многосвязной, после проведения расчета в данной точке пространства параметров становится ясно, принадлежит эта точка области G_{corr} или не принадлежит, так как программа всегда сигнализирует о выходе за пределы этой области установкой соответствующего индикатора. Поэтому результат каждого расчета

можно представить в виде двухкомпонентной целевой функции

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ J_{\text{corr}} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

первой компонентой которой является значение ГКЦФ, а второй – значение логического индикатора корректности (“true” – корректная точка, “false” – некорректная точка). Если точка некорректная, то значение ГКЦФ в ней при оптимизации не будет учитываться.

Вместо векторной функции (5) можно ввести скалярную функцию, доопределив значение ГКЦФ в области $G_0 \setminus G_{\text{corr}}$ нулем:

$$\Phi_1^*(B) = \begin{cases} \Phi_1(B), & B \in G_{\text{corr}}, \\ 0, & B \notin G_{\text{corr}}. \end{cases} \quad (6)$$

Функцию $\Phi_1^*(B)$ также будем называть ГКЦФ.

Таким образом, задача свелась к оптимизации ГКЦФ (6) по корректным точкам области G_0 :

$$\Phi_1^*(B) \xrightarrow{B} \max, \quad \dim(B) = m. \quad (7)$$

Задачу (7) примем за окончательную постановку задачи оптимизации клистро-на.

4. Метод макрошагов с экспертной оценкой

Область G_{corr} найти априори невозможно, однако нетрудно эмпирическим путем найти некоторую точку $B^{(1)} \in G_{\text{corr}}$. Можно найти также прямоугольную (в виде многомерного параллелепипеда) окрестность $\Pi(B^{(1)})$ точки $B^{(1)}$ так, чтобы мера области $\Pi(B^{(1)}) \cap G_{\text{corr}}$ была существенно отлична от нуля. Для этого проводится серия расчетов, при каждом из которых один параметр изменяется в некотором диапазоне относительно исходного значения, а значения остальных параметров фиксируются. Это позволяет для каждого параметра определить область изменения, в которой значения ГКЦФ остаются корректными и существенно отличными от нуля. Соответствующий тип расчета реализован в программе KlypWin. Получившийся многомерный параллелепипед назовем *исходной рабочей областью* $G_{\text{work}}^{(1)}$. Среднее значение функции $\Phi_1^*(B)$ по области $G_{\text{work}}^{(1)}$ будет существенно отличаться от нуля, поэтому для оптимизации по области $G_{\text{work}}^{(1)}$ можно применить зондирование.

Задача (7) состоит в том, чтобы найти точку $B^{(\text{opt})}$ такую, что $\Phi_1(B^{(\text{opt})}) = \eta_{\text{max}}$. Окрестность $\Pi(B^{(\text{opt})})$ обозначим $G_{\text{work}}^{\text{opt}}$.

Реализуем процесс последовательного изменения рабочей области в результате выполнения цепочки макрошагов $G_{\text{work}}^{(1)} \rightarrow G_{\text{work}}^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow G_{\text{work}}^{\text{opt}}$ (рис. 1).

Каждый такой макрошаг включает оптимизацию по соответствующей рабочей области $G_{\text{work}}^{(k)}$. В результате макрошага должно, во-первых, получиться некоторое заданное количество n_p корректных точек с максимальными значениями ГКЦФ, а во-вторых, должны быть найдены величины, характеризующие область $G_{\text{work}}^{(k)}$ в целом.

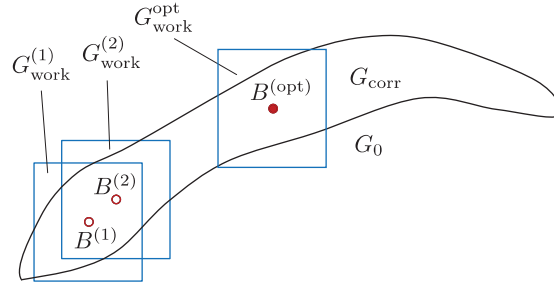


Рис. 1. Схема последовательности макрошагов

В качестве основной величины $g_{\text{work}}^{(k)}$, характеризующей область $G_{\text{work}}^{(k)}$, можно взять среднее значение $\langle \Phi_1^*(B) \rangle_{\text{work}}^{(k)}$ по области $G_{\text{work}}^{(k)}$, однако более подходящей характеристикой с точки зрения поиска максимума является “среднемаксимальное значение”, т. е. величина

$$g_{\text{work}}^{(k)} = \langle \Phi_1^*(B) \rangle_{\text{work}}^{(k)} + \sigma_{\text{work}}^{(k)}, \quad (8)$$

где $\sigma_{\text{work}}^{(k)}$ – среднеквадратичное отклонение $\Phi_1^*(B)_{\text{work}}^{(k)}$ от $\langle \Phi_1^*(B) \rangle_{\text{work}}^{(k)}$ в области $G_{\text{work}}^{(k)}$.

В качестве более детальной характеристики области $G_{\text{work}}^{(k)}$ введем скалярную функцию скалярного аргумента – плотность меры уровня (см. [12]), определяемую соотношением

$$\psi'(y)_{\text{work}}^{(k)} = \frac{dV_{\Phi_1^* > y}}{dy}, \quad (9)$$

где $V_{\Phi_1^* > y}$ – мера области $G_y \subset G_{\text{work}}^{(k)}$, на которой значения ГКЦФ превышают y .

Если оптимизация по области $G_{\text{work}}^{(k)}$ проводится методом зондирования, то правая часть выражения (9) записывается в конечных разностях как $\frac{\Delta V_{y \leq \Phi_1^* \leq y + \Delta y}}{\Delta y}$, где $V_{y \leq \Phi_1^* \leq y + \Delta y}$ – доля точек со значением Φ_1^* в диапазоне $y \leq \Phi_1^* \leq y + \Delta y$.

Проведем оптимизацию по области $G_{\text{work}}^{(1)}$, в результате которой получим n_p лучших точек, значение $g_{\text{work}}^{(1)}$ и функцию $\psi'(y)_{\text{work}}^{(k)}$, а затем проведем экспертный анализ полученных точек.

В процессе такого экспертного анализа детально рассматриваются процессы группирования и отбора энергии, анализируются фазовые траектории, функции прибытия частиц и распределения скоростей, рассматривается изменение формы АЧХ при изменении входной мощности и т. д. Целью экспертного анализа является сравнение детальных характеристик каждого из n_p полученных приборов с теми, которые должны получаться для “идеальных” процессов группирования и отбора энергии. Экспертный анализ плохо поддается формализации и должен выполняться исследователем. В результате выбирается одна наилучшая точка $B^{(2)}$, которая не обязательно соответствует наибольшему значению ГКЦФ.

Сформируем новую область $G_{\text{work}}^{(2)}$, равную области $G_{\text{work}}^{(1)}$ по размерам, выбрав в качестве ее центра точку $B^{(2)}$. Проведем оптимизацию по области $G_{\text{work}}^{(2)}$,

в результате которой снова получим n_p лучших точек, значение $g_{\text{work}}^{(2)}$ и функцию $\psi'(y)_{\text{work}}^{(k)}$. При следующем анализе для выбора наилучшей точки будем учитывать все лучшие точки, полученные на предыдущем макрошаге, а также соответствующие значения $g_{\text{work}}^{(k)}$ и вид функций $\psi'(y)_{\text{work}}^{(k)}$.

В результате второго экспертного анализа будет выбрана точка $B^{(3)}$, и далее процесс должен повторяться.

Таким образом, на s -м макрошаге лучшая точка выбирается в результате анализа sn_p точек (при этом $(s-1)n_p$ из них уже проанализированы ранее) с учетом s значений $g_{\text{work}}^{(k)}$ и s функций $\psi'(y)_{\text{work}}^{(k)}$.

Процесс останавливается, когда после очередного экспертного анализа лучшая точка остается неизменной, причем значение ГКЦФ в этой точке является максимальным среди всех рассмотренных значений. Эту точку и считаем искомой точкой $B^{(\text{opt})}$.

Для реализации рассмотренного алгоритма необходимо определить метод оптимизации по области $G_{\text{work}}^{(k)}$. С учетом рассмотренных выше особенностей целевой функции был выбран метод, состоящий из двух частей: исследования области и отбора лучших точек методом зондирования; последующего уточнения лучших точек методом перебора с масштабированием. Рассмотрим эти методы по отдельности.

5. Метод зондирования (первая часть макрошага)

Метод зондирования (или метод Монте-Карло [13]) позволяет решать задачу поиска глобального экстремума для целевой функции, заданной на многомерном параллелепипеде Π . При этом никаких ограничений на вид и свойства целевой функции не налагается. Суть метода заключается в последовательном вычислении значения целевой функции в точках

$$B^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \dots \\ x_M^{(n)} \end{pmatrix},$$

составляющих последовательность, асимптотически равномерно заполняющую параллелепипед. Под асимптотической равномерностью заполнения параллелепипеда понимается условие (см. [2], [13])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_G}{n} = \frac{V_G}{V}, \quad (10)$$

где n_G – количество точек последовательности $B^{(n)}$, попавших в некоторую произвольно заданную измеримую область $G \subset \Pi$, V_G – мера области G , V – мера параллелепипеда Π . Вместо параллелепипеда Π обычно рассматривается единичный куб K , который считается эквивалентным параллелепипеду, так как координата внутренней точки такого куба может быть пересчитана в координату внутренней точки параллелепипеда с помощью операции линейного масштабирования. С физической точки зрения параллелепипед Π и единичный куб K являются эквивалентными только в том случае, если все ребра параллелепипеда, измеренные в характерных шагах изменения соответствующей переменной,

являются примерно одинаковыми. В качестве таких характерных шагов можно взять, например, погрешности измерения соответствующих физических величин. Далее будем считать условие эквивалентности куба K и параллелепипеда Π выполненным.

Для сравнения различных последовательностей $B^{(n)}$, удовлетворяющих условию (10), рассматривают асимптотическое поведение неравномерности [13]

$$\nu(n) = \left| \frac{n_G}{n} - \frac{V_G}{V} \right| \quad (11)$$

как функции от n при $n \rightarrow \infty$. При этом область G обычно фиксируется в виде куба меньшего размера.

Качество последовательности считается тем выше, чем больше скорость убывания функции $\nu(n)$. В настоящее время известны две векторные последовательности, имеющие наибольшую асимптотическую скорость убывания неравномерности: ЛП $_{\tau}$ -последовательность Соболя [14] и последовательность Холтона [15]. Для этих последовательностей асимптотика неравномерности определяется формулой [13]

$$\nu_{PQ}(n) \sim \frac{\ln^m(n)}{n}, \quad (12)$$

где m – размерность пространства.

Векторная m -мерная последовательность Соболя составляется из m независимых одномерных ЛП $_{\tau}$ -последовательностей, которые будем далее обозначать $P_m(n)$. Аналогичная векторная последовательность Холтона составляется из m первых одномерных последовательностей Холтона, которые будем обозначать $Q_m(n)$.

Кроме последовательностей Соболя и Холтона, будем рассматривать m -мерную случайную векторную последовательность, составленную из m одномерных случайных последовательностей $R_m(n)$, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$. Асимптотическая неравномерность случайной векторной последовательности не зависит от размерности пространства m и определяется выражением [13]

$$\nu_R(n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (13)$$

с гораздо меньшей, чем у выражения (12), скоростью убывания.

Выражения (12) и (13) дают асимптотику неравномерности при $n \rightarrow \infty$. Для практического использования последовательностей при зондировании требуется максимальная равномерность заполнения при некотором конечном и фиксированном значении n . Поскольку в настоящее время отсутствует общепринятое определение равномерности при фиксированном количестве точек, будем исходить из интуитивных представлений.

Рассмотрим различные двумерные сечения каждой из трех рассмотренных m -мерных последовательностей, т. е. двумерные последовательности

$$P_{m/m'} = \begin{pmatrix} P_m(n) \\ P_{m'}(n) \end{pmatrix}, \quad Q_{m/m'} = \begin{pmatrix} Q_m(n) \\ Q_{m'}(n) \end{pmatrix}, \quad R_{m/m'} = \begin{pmatrix} R_m(n) \\ R_{m'}(n) \end{pmatrix}$$

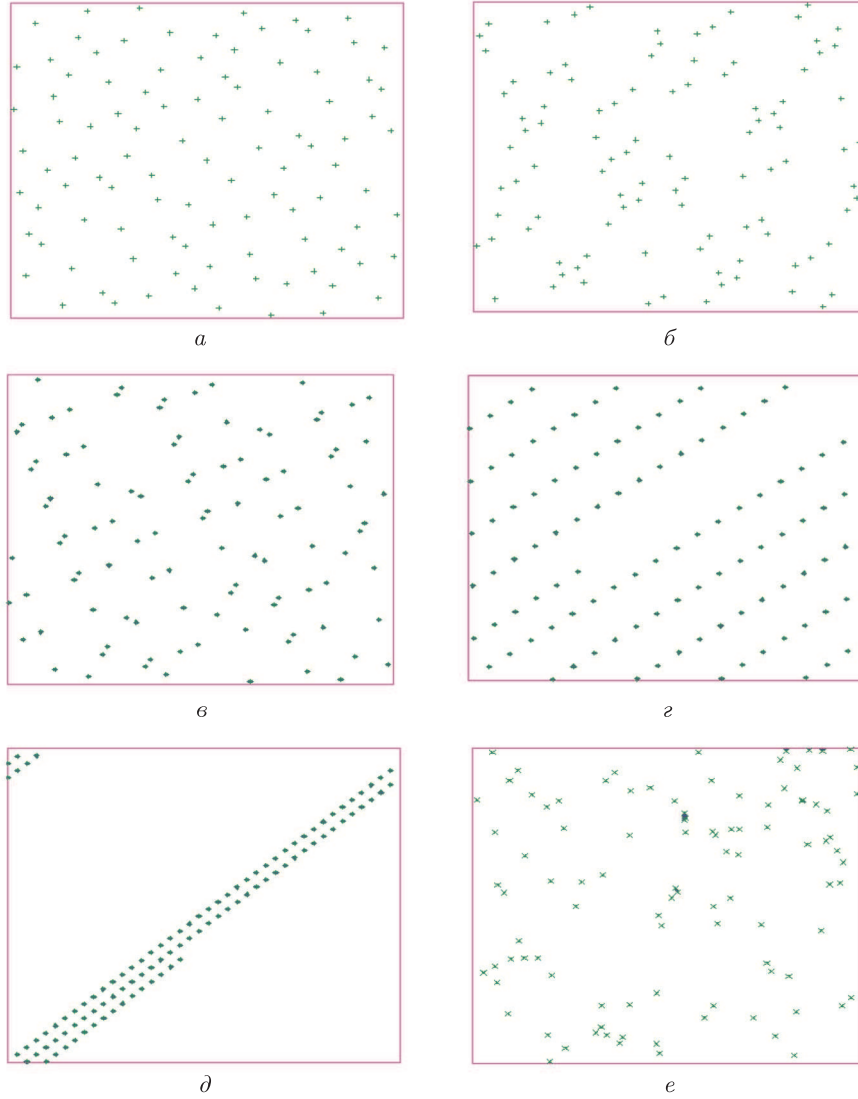


Рис. 2. Двумерные сечения векторных последовательностей (100 первых членов): $a - P_{1/2}$; $b - P_{12/13}$; $в - Q_{1/2}$; $г - Q_{6/7}$; $д - Q_{12/13}$; $е - R_{m/m'}$

при различных значениях m и m' , и оценим равномерность этих сечений, исходя из интуитивного понимания равномерности и полагая, что для последовательностей $P_m(n)$ и $Q_m(n)$ при фиксированном n равномерность уменьшается с увеличением m (этот факт строго доказывается только для асимптотической неравномерности (12)). На рис. 2 такие сечения изображены для 100 первых членов каждой последовательности.

Как видно из рис. 2, равномерность сечения $P_{1/2}$ весьма высока, равномерность сечения $P_{12/13}$ не только значительно ниже равномерности сечения $P_{1/2}$,

но и ниже равномерности сечения $Q_{1/2}$ и примерно такая же, как у сечения $R_{m/m'}$, равномерность сечения $Q_{6/7}$ остается достаточно высокой, хотя и уменьшается из-за увеличившейся упорядоченности, а вот сечение $Q_{12/13}$ уже нельзя назвать равномерным.

Анализ значительного количества аналогичных сечений привел к выводу, что наилучшее заполнение одномерного куба при произвольном фиксированном количестве точек n обеспечит комбинированная векторная последовательность

$$S_{m'}(n) = \begin{cases} P_{m'}(n) & \text{при } m' \leq 13, \\ Q_{m'-13}(n) & \text{при } 14 \leq m' \leq 20, \\ R_{m'}(n) & \text{при } m' \geq 21. \end{cases} \quad (14)$$

Последовательность (14) реализована в комплексе программ KlypWin в виде процедуры-генератора точки в одномерном кубе и используется для первой части макрошага – зондирования текущей рабочей области.

Координаты n -й точки рабочей области находятся линейным масштабированием:

$$B_{m'}^{(n)} = a_{m'} + (b_{m'} - a_{m'})S_{m'}(n) \quad (15)$$

где m' – номер координаты, $m' = \overline{1, m'}$, $a_{m'}$, $b_{m'}$ – границы ребра параллелепипеда $G_{\text{work}}^{(k)}$ по координате с номером m' .

Значения ГКЦФ вычисляются для всех точек (15) при $n = \overline{1, N}$, где N – заданное количество точек зондирования.

Из полученных точек выбирается n_p лучших, а по всем корректным точкам вычисляется значение $g_{\text{work}}^{(k)}$ и находится функция $\psi'(z)_{\text{work}}^{(k)}$, которая выводится в виде графика.

6. Метод перебора с масштабированием (вторая часть макрошага)

Второй частью каждого макрошага является уточнение найденных n_p лучших точек, т.е. нахождение локального максимума ГКЦФ вблизи каждой из этих точек.

Метод такого уточнения должен, с одной стороны, обладать быстрой (желательно экспоненциальной) сходимостью по отношению к количеству вычислений целевой функции, а с другой стороны, он должен адекватно отрабатывать некорректные точки, т.е. быть нечувствительным к выходу за пределы области $G_{\text{сорт}}$. Этим требованиям удовлетворяет метод перебора с масштабированием (МПИМ) [16], который и реализован в программе KlypWin.

В [16] показано, что одномерный МПИМ обладает более быстрой сходимостью, чем метод Фибоначчи [17] и метод золотого сечения [17], которые ранее считались самыми быстрыми методами нулевого порядка.

В отличие от метода Фибоначчи и метода золотого сечения, МПИМ легко переносится на многомерный случай.

На рис. 3 показана схема m -мерного МПИМ при $m = 2$.

Пусть $B^{(0)}$ – некоторая исходная точка, задан коэффициент масштабирования μ (обычно $\mu = 10$) и задано необходимое количество масштабирований \varkappa , определяемое исходя из требуемой точности. Определим компоненты исходного

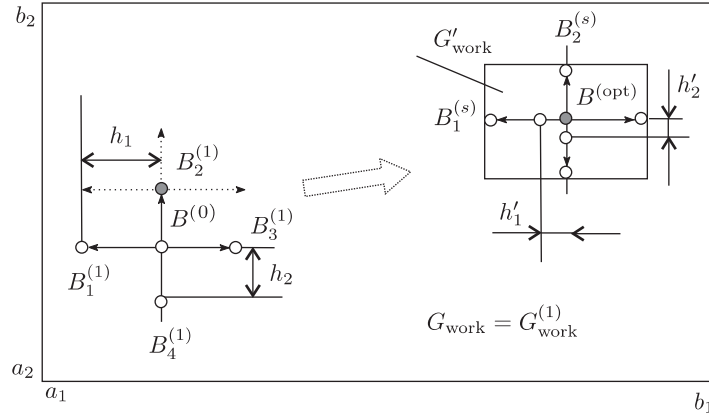


Рис. 3. Иллюстрация алгоритма многомерного МПМ

вектора шага h по известным размерам параллелепипеда $G_{\text{work}}^{(k)}$ в соответствии с выражением $h_l = \frac{b_l - a_l}{2\mu}$, где l – номер компоненты. Норму $\|h\|$ вектора h будем называть *текущим масштабом*. Норма может быть определена в смысле пространств C , L_2 или любым другим корректным способом.

Проведем первый цикл перебора с текущим масштабом. Вычислим значение ГКЦФ в точке $B^{(0)}$ и во всех соседних с ней точках, понимая под соседними те точки, у которых одна l -я координата отличается от l -й координаты точки $B^{(0)}$ на величину h_l , а остальные координаты совпадают с соответствующими координатами точки $B^{(0)}$. На рис. 3 соседние с $B^{(0)}$ точки обозначены как $B_1^{(1)}$, $B_2^{(1)}$, $B_3^{(1)}$, $B_4^{(1)}$. Введем обозначения $\Phi_1^*(B_r^{(s)}) = \phi_r^s$, $\Phi_1^*(B^{(0)}) = \phi^0$, где Φ_1^* определяется выражениями (6) и (1), $r = \overline{1, 2m}$, $s \in \mathbb{N}$. Предположим, что есть некоторые значения r , например $r = 2$ и $r = 3$, для которых $\phi_r^1 > \phi^0$. Выберем точку $B_r^{(1)}$ с наибольшим значением ϕ_r^1 (предположим, что такой оказалась точка $B_2^{(1)}$), назначим ее новой исходной точкой для выполнения следующего шага и т. д. Алгоритм остановится, когда у очередной точки $B^{(\text{opt})}$ все соседние точки будут характеризоваться меньшим значением Φ_1^* . Это будет точка локального максимума с погрешностью h_l по l -й переменной, и первый цикл перебора на этом закончится. Интервал неопределенности по l -й переменной при этом будет равен $2h_l$. Полученную точку будем называть точкой максимума в масштабе $\|h\|$.

Далее уменьшим текущий масштаб в μ раз, перейдя к новому вектору шага $h'_l = h_l/\mu$, и проведем второй цикл перебора в масштабе $\|h'\|$, аналогичный первому циклу из найденной в первом цикле перебора точки $B^{(\text{opt})}$. Вторым циклом перебора будет, по сути, оптимизацией по параллелепипеду G'_{work} с размерами ребер $b'_l - a'_l = \frac{b_l - a_l}{\mu} = \frac{2h_l}{\mu}$. В результате будет получена точка локального максимума в масштабе $\|h'\|$ с погрешностью по каждой переменной $h'_l = \frac{h_l}{\mu} = \frac{b_l - a_l}{2 \cdot \mu^2}$.

Далее процесс повторяется, пока не пройдут все \varkappa циклов перебора с последовательно уменьшающимися масштабами. В результате будет найдена точка максимума в масштабе $\frac{\|b-a\|}{\mu^{\varkappa}}$ с погрешностью по каждой переменной $\frac{b_l - a_l}{2\mu^{\varkappa}}$ и с интервалом неопределенности $\frac{b_l - a_l}{\mu^{\varkappa}}$. Выбором \varkappa погрешность можно сделать сколь угодно малой.

Докажем экспоненциальный характер сходимости предложенного алгоритма по отношению к количеству вычислений значений целевой функции. Действительно, в силу конечного μ количества разбиений параллелепипеда по каждой переменной и, соответственно, конечного количества шагов каждого цикла количество n_c вычислений функции на одном цикле конечно и ограничено некоторым общим для всех циклов значением $n_{c \max}$, поэтому общее количество n вычислений ГКЦФ не превышает величину $\varkappa n_{c \max}$. В результате выполнения алгоритма интервал неопределенности по каждой переменной уменьшится в μ^\varkappa раз. Величину μ^\varkappa можно представить как β^n , где $\beta = \mu^{\varkappa/n} \geq \mu^{1/n_{c \max}} > 1$, что доказывает экспоненциальный характер сходимости алгоритма.

Отметим, что с увеличением размерности m количество вычислений ГКЦФ возрастает линейно, т. е. достаточно медленно, поэтому для многопараметрической оптимизации алгоритм эффективен.

В результате выполнения алгоритма получаются n_p лучших точек, каждая из которых является точкой локального экстремума. Для каждой из этих n_p точек рассчитывается АЧХ и фазовые траектории на основной частоте, соответствующие графики выводятся через графический интерфейс комплекса программ KlurWin и анализируются исследователем с целью выбора единственной лучшей точки для проведения следующего макрошага.

7. Результаты оптимизации мощных клистронов

Рассмотрим результаты оптимизации клистронов с целью получения КПД, близкого к предельному, для трех различных базовых конструкций.

В процессе оптимизации каждого из рассматриваемых приборов увеличение КПД происходило достаточно медленно, причем скорость этого увеличения заметно уменьшалась при приближении к глобальному экстремуму. Так, если для первых макрошагов приращение ГКЦФ составляет 5–7% за один макрошаг, то для последних макрошагов такое приращение не превышает 0.5%.

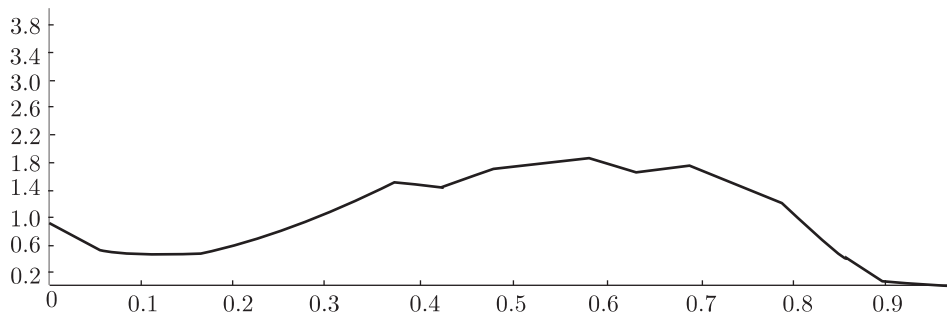


Рис. 4. Вид функции $\psi'(y)$, определяемой выражением (9), в окрестности глобального максимума

Функция $\psi'(y)$, определяемая выражением (9), в окрестности глобального максимума имеет пологий вид (рис. 4), что говорит о достаточно “медленном” изменении целевой функции.

Такой характер целевой функции накладывает жесткие требования на качество математической модели, реализующей целевую функцию: приращение

ГКЦФ на одном шаге должно быть больше погрешности. Оценки показывают, что случайная ошибка расчета КПД не должна превышать 0.001. Это требует следующих настроек дискретно-аналитической модели: погрешность итерационной процедуры при расчете напряжений не менее 0.0001, количество усредненных частиц не менее 127, количество парциальных зазоров при разбиении СВЧ-зазора не менее 65 (см. [18], [19]).

При таких настройках один расчет КПД по программе KlypWin составляет около 1 с на ПК средней мощности, один макрошаг оптимизации требует от 6 до 20 ч., а на полную оптимизацию прибора уходит около 1 мес.

Первый из рассматриваемых приборов базируется на следующих параметрах группы А: основная частота $f_0 = 706$ МГц, ускоряющее напряжение $U_0 = 15$ кВ, полный ток $I_0 = 2.8$ А, число лучей $N_b = 7$, количество резонаторов $N_c = 7$, диаметр труб дрейфа $d_T = 14$ мм, протяженность зазоров $l_g = 14.3$ мм, характеристические сопротивления резонаторов $\rho = 70$ Ом.

Оптимизация рассматриваемого клистрона потребовала 25 макрошагов и более 1 млн расчетов значений целевой функции.

Исходный вариант для первого макрошага имел КПД около $\eta = 70\%$. За первые три макрошага КПД увеличился до 84% и далее очень медленно увеличивался до предельного значения $\eta = \eta_{\max} = 89\%$ в точке B_{\max} .

На рис. 5, 6 для окончательного варианта прибора изображены АЧХ и фазовые траектории на центральной частоте. АЧХ сохраняет свою естественную ширину [19], т. е. увеличение КПД не приводит к сужению полосы усиления.

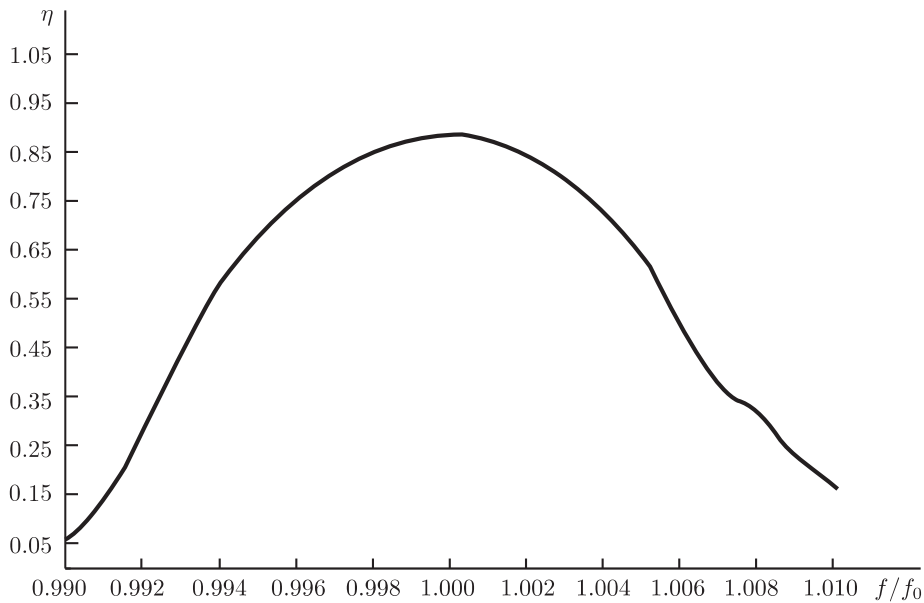


Рис. 5. АЧХ первого оптимального клистрона с КПД 89%

Как было установлено в [19], для достижения предельных значений КПД требуется значительное увеличение длины прибора. Это необходимо для достижения нелинейно-волнового характера группирования, при котором центральные частицы сгустка то приближаются к центру сгустка, то удаляются от него,

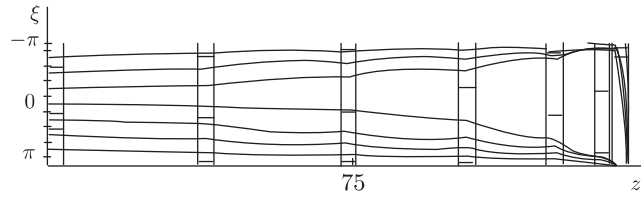


Рис. 6. Фазовые траектории первого оптимального клистрона с КПД 89%

а периферийные частицы почти монотонно движутся к центру сгустка. Такой процесс позволяет постепенно перевести все частицы из области антисгустка (разряжения) в область сгустка, что в конечном счете обеспечит КПД, близкий к 100%.

В результате проведенной оптимизации все эти выводы полностью подтвердились. После последовательности макрошагов исходная длина прибора увеличилась в 1.5 раза по отношению к прототипу и процесс группирования действительно стал нелинейно-волновым.

Такой характер процесса группирования иллюстрируется рис. 6, на котором приведены фазовые траектории частиц: зависимости нормированного отклонения $\xi = z^* - t^*$ от нормированной координаты $z^* = \frac{\omega z}{v_0}$, где $t^* = \omega t$ – нормированное время, t – текущее время, $\omega = 2\pi f$ – СВЧ-частота (rad/c), z – текущая координата вдоль пучка, v_0 – средняя (невозмущенная) скорость пучка.

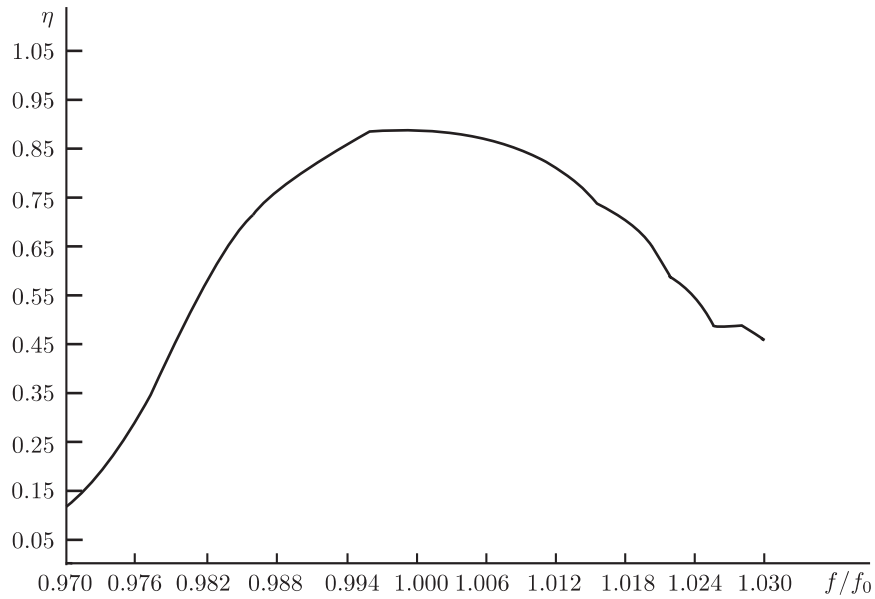


Рис. 7. АЧХ второго оптимального клистрона с КПД 90%

Второй из рассматриваемых приборов имел следующие базовые параметры: основная частота $f_0 = 990$ МГц, ускоряющее напряжение $U_0 = 50$ кВ, полный ток $I_0 = 170$ А, число лучей $N_b = 42$, количество резонаторов $N_c = 7$, диаметр

труб дрейфа $d_T = 14$ мм, протяженности зазоров $l_g = 30$ мм, характеристические сопротивления резонаторов $\rho = 30$ Ом.

В результате оптимизации, потребовавшей 30 макрошагов, получен клистрон с КПД около 90% (рис. 7).

Анализ фазовых траекторий снова отчетливо показывает нелинейно-волновой характер группирования (рис. 8).

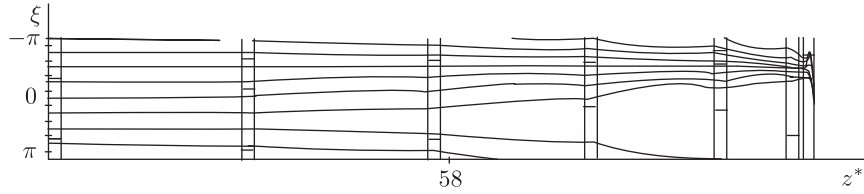


Рис. 8. Фазовые траектории второго оптимального клистрона с КПД 90%

Третий прибор по параметрам группы А соответствовал требованиям, предъявляемым к источникам СВЧ-мощности для современных ускорителей элементарных частиц [20]. Он имел следующие базовые параметры: основная частота $f_0 = 1000$ МГц, ускоряющее напряжение $U_0 = 180$ кВ, полный ток $I_0 = 128$ А, число лучей $N_b = 8$, количество резонаторов $N_c = 6$, диаметр труб дрейфа $d_T = 20$ мм, протяженности зазоров $l_g = 30$ мм, характеристические сопротивления резонаторов $\rho = 20$ Ом.

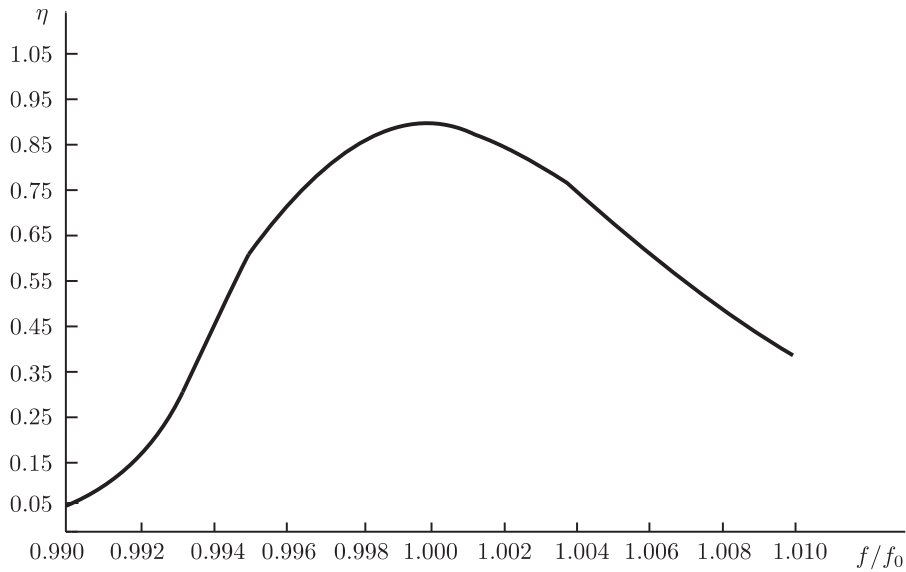


Рис. 9. АЧХ третьего оптимального клистрона с КПД 89.5%

Оптимизация прибора потребовала 27 макрошагов, в результате получен максимальный КПД 89.5% (рис. 9).

Все выводы о нелинейно-волновом характере группирования остаются в силе, причем эффект колебания центральных частиц и почти монотонного дви-

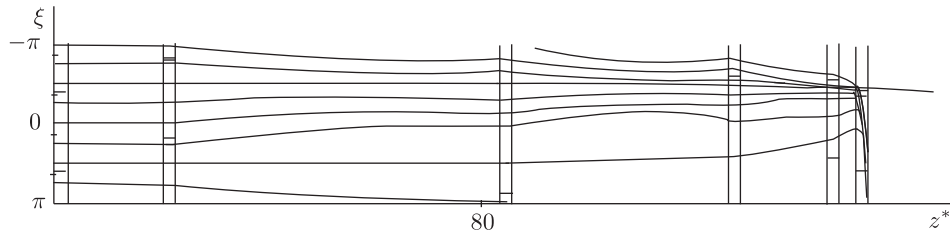


Рис. 10. Фазовые траектории третьего оптимального клистрона с КПД 89.5%

жения периферийных частиц в данном случае проявляется еще более отчетливо (рис. 10).

Таким образом, для всех трех рассмотренных различных базовых конструкций оптимизация методом макрошагов привела к одинаковому результату: получается прибор с КПД около 90%, причем общая длина оказывается значительно увеличенной по сравнению с традиционными значениями, а группирование имеет выраженный нелинейно-волновой характер.

8. Возможности обобщения метода оптимизации

Рассмотренный метод сформулирован для оптимизации мощных клистронов, моделируемых программой KlyrWin, т. е. для вполне конкретной алгоритмически заданной целевой функции.

Проанализируем возможность обобщения этого метода на некоторый более широкий класс целевых функций.

Для корректного применения предложенного метода должны выполняться следующие условия:

- 1) область глобальной оптимизации G_0 должна представлять собой конечный многомерный параллелепипед в пространстве параметров;
- 2) векторная целевая функция должна представляться в виде (5), это всегда возможно, если целевая функция реализована в виде компьютерной программы, в результате каждого расчета получается одна скалярная величина (ГКЦФ) и выдается информация о выполнении или невыполнении некоторого набора условий;
- 3) должна быть известна исходная корректная точка $B^{(1)}$;
- 4) в программе, вычисляющей целевую функцию, должна быть реализована возможность нахождения прямоугольной окрестности $G_{\text{work}}^{(1)}$ точки $B^{(1)}$ такой, что значительная часть этой области является корректной;
- 5) должна быть реализована возможность экспертной оценки нескольких лучших точек и выбора из них наилучшей после выполнения каждого макрошага.

Если условия 1)–5) выполнены, то применение метода макрошагов для поиска глобального экстремума возможно.

9. Заключение

Таким образом, поставлена задача глобальной оптимизации мощных клистронов, основанная на представлении исходной алгоритмически заданной целевой функции (АЧХ клистрона) в виде векторной двухкомпонентной функ-

ции (5) или скалярной целевой функции (6). Введено обобщенное понятие корректности ГКЦФ, включающее алгоритмическую корректность, вычислительную корректность и корректность, связанную с дополнительными компонентами целевой функции. Проанализированы особенности такой целевой функции, включающие негладкость и многоэкстремальность.

Предложен метод оптимизации построенной целевой функции, названный методом макрошагов и основанный на последовательном проведении серий оптимизаций (макрошагов) по последовательности многомерных параллелепипедов, причем центром каждого следующего параллелепипеда становится лучшая точка, выбранная по результатам всех предыдущих макрошагов. Результатом каждого макрошага становятся несколько лучших точек, которые добавляются к ранее полученным и анализируются экспертом. Для выполнения каждого макрошага последовательно применяются два метода: метод зондирования и метод перебора с масштабированием.

Проанализированы условия достижения максимальной равномерности многомерного зондирования и исследованы генераторы точки в единичном кубе, основанные на применении последовательностей Соболя, последовательностей Холтона и равномерно распределенной случайной последовательности. Построен генератор векторной последовательности (14), включающей до 13 одномерных последовательностей Соболя, до 7 одномерных последовательностей Холтона и необходимое количество квазислучайных последовательностей.

Сформулирован метод перебора с масштабированием (МПМ) для улучшения полученных в результате зондирования точек и показана его экспоненциальная сходимость.

Метод оптимизации встроен в комплекс программ KlypWin и применен для оптимизации клистронов на основе трех различных базовых конструкций. Показано, что для всех трех рассмотренных базовых клистронов максимальный КПД составляет около 90%. Группирование при этом имеет нелинейно-волновой характер: центральные частицы совершают колебания, а периферийные движутся почти монотонно.

Проанализированы возможности обобщения предложенного метода и сформулированы условия для класса целевых функций, которые могут быть оптимизированы данным методом.

Список литературы

1. АРТИХ И. Г., БАЙКОВ А. Ю., ПЕТРОВ Д. М. *Высокоэффективные пролетные клистроны*. Тез. докладов Международной конференции, посвященной дню радио (Москва, май 1997). НТО РЭС им. А. С. Попова, М., 1997.
2. АНТОНОВА Г. М. *Сеточные методы равномерного зондирования для исследования и оптимизации динамических стохастических систем*. Физматлит, М., 2007.
3. БАЙКОВ А. Ю. *Дискретно-аналитическая модель для одной задачи динамики нелинейной среды*. Вестн. Моск. финансово-юридического ун-та МФЮА, **1** (2013), 18–31.
4. БАЙКОВ А. Ю. *Компьютерное моделирование мощных и сверхмощных резонаторных СВЧ-приборов*. Информационно-измерительные и управляющие системы, **8:4** (2010), 36–46.

5. БАЙКОВ А. Ю., ЕЖИКОВ В. Б. *Редактируемый интерфейс ввода-вывода данных для вычислительной модели, включающей многопараметрическую оптимизацию*. Вестн. Московского финансово-юридического ун-та МФЮА, **1** (2011), 173–182.
6. БАЙКОВ А. Ю., ГРУШИНА О. А., СТРИХАНОВ М. Н., ТИЩЕНКО А. А. *Математическая модель трансформации электронного пучка в узкой трубе*. ЖТФ, **82**:6 (2012), 90–100.
7. БАЙКОВ А. Ю., ГРУШИНА О. А. *Модель трансформации электронного пучка в узкой трубе и ее применение для проектирования мощных клистронов*. МФЮА, М., 2013.
8. JENSEN A. J. ET AL. *Sheet beam klystron simulations using AJDISK* (IVEC-2006, Monterey, CA, USA, April 2006). IEEE, 489–490.
9. АНТОНОВА Г. М., БАЙКОВ А. Ю. *Использование ЛП_τ-поиска с усреднением для выбора параметров при синтезе мощных вакуумных резонаторных СВЧ-приборов О-типа*. Тр. 5 Межд. конференции “Идентификация систем и задачи управления”. ИПУ, М., 2006, 823–837.
10. ANTONOVA G. M., BAIKOV A. YU. *LP_τ-search with averaging methodology for optimizing powerful and super-power klystrons*. ACIT – Signal and Image Processing (ACIT-SIP, Novosibirsk, Russia, June 20–24, 2005). ACTA Press, Novosibirsk, 2005.
11. АНТОНОВА Г. М., ЦВИРКУН А. Д. *Оптимизационно-имитационное моделирование для решения проблем оптимизации современных сложных производственных систем*. Проблемы управления, **5** (2005), 19–27.
12. ЧИЧИНАДЗЕ В. К. *Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации*. Наука, М., 1983.
13. СОБОЛЬ И. М. *Численные методы Монте-Карло*. Наука, М., 1973.
14. СОБОЛЬ И. М. *Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара*. Наука, М., 1969.
15. HALTON J. M.. *Algorithm 247: Radical-inverse quasi-random point sequence*. Communications of the ACM, **7**:12 (1964), 701–702.
16. БАЙКОВ А. Ю., ЕЖИКОВ В. Б. *Метод перебора с масштабированием в задачах одномерной оптимизации*. Тр. конференции “Математика, информатика, естествознание в экономике и в обществе”. МФЮА, М., 2010, 53–57.
17. ГИЛЛ Ф., МЮРРЕЙ У., РАЙТ М. *Практическая оптимизация*: Пер. с англ., Мир, М., 1985.
18. БАЙКОВ А. Ю., ГРУШИНА О. А., СТРИХАНОВ М. Н. *Исследование зависимости максимального КПД от коэффициента усиления в двухрезонаторных клистронах*. ЖТФ, **83**:4 (2013), 127–133.
19. БАЙКОВ А. Ю., ГРУШИНА О. А., СТРИХАНОВ М. Н. *Моделирование условий достижения максимального КПД в клистропах дециметрового диапазона*. ЖТФ, **84**:3 (2014), 113–119.
20. JENSEN E. *High efficiency work in context*. EnEfficient RF sources Workshop, Cockcroft Institute, UK, June 2014.

АНДРЕЙ ЮРЬЕВИЧ БАЙКОВ
Московский финансово-юридический
университет МФЮА, Москва, Россия.
E-mail: baikov.a@mfua.ru, a_yu_baikov@mail.ru

Поступило 11.09.2014

Applied Mathematics and Mathematical Physics
2015, Vol. 1, No. 1, 47–66

Method of Macrosteps for Multiple Parameter Global Optimization of Powerful Klystrons

A. YU. BAIKOV

Abstract. The method of efficiency optimization of the powerful klystrons presented by computer model is offered. The reduction of initial vector criterion function to two-component or to a scalar form on the basis of concept of a correctness of a principal value is used at a problem definition. The method of optimization is based on consecutive carrying out cycles of optimization (macrosteps), each of which includes optimization by a sounding method and a search method on a multidimensional parallelepiped. Method application for optimization of three klystrons with various basic designs is considered. It is shown that in all considered cases optimization allows to receive an optimum klystron with efficiency about 90%. Possibilities of generalization of the offered method on wider class of tasks are considered.

Keywords: global optimization, multiple parameter optimization, nonconvex programming, goal vector function, efficiency, klystron.

MSC2010: 78M50, 90C26



УДК 539.3

Алгоритм численного обращения преобразования Лапласа в классе обобщенных функций, образующих алгебру со сверткой

В. А. Вестяк, Г. В. Федотенков

Аннотация. Предложена методика получения решений нестационарных задач механики с использованием численного обращения интегрального преобразования Лапласа, метода малого параметра и специальных квадратурных формул для вычисления интегралов типа свертки. Данный подход применен к решению новых актуальных нестационарных задач, возникающих при учете связности полей различной природы при электромагнитоупругих и механолифузионных процессах, а также нестационарных связанных задач для тел и элементов конструкций, обладающих неклассическими свойствами.

Ключевые слова: нестационарные задачи, численное обращение преобразования Лапласа, метод малого параметра, квадратурные формулы.

1. Введение

При создании перспективных конструкций новой техники, в том числе авиационных и ракетно-космических, часто возникает необходимость исследования нестационарного изменения их параметров в процессе взаимодействия с внешними полями и средами. Современное развитие в сфере разработки и проектирования новой техники ставит новые задачи, связанные с возможностью адекватного описания и расчета нестационарных волновых процессов, протекающих в элементах конструкций, обладающих усложненными свойствами в ответ на воздействие внешних возмущений различной физической природы. Эти задачи относятся к одним из наиболее сложных как при построении математических моделей, так и при получении решений. При их решении зачастую требуется разработка новых оригинальных методов и подходов. В частности, подход, рассматриваемый в настоящей работе, в той или иной степени моделирует воздействие полей различной природы на корпус как ракетной, так и авиационной техники.

При решении задач в самых различных областях науки возникает необходимость в использовании интегрального преобразования Лапласа. Особенно важное применение оно находит в задачах, связанных с исследованием процессов, изменяющихся во времени. К наиболее сложным проблемам относится класс нестационарных задач, в которых происходит интенсивное изменение параметров процесса с течением времени. При этом зачастую преобразование Лапласа

© Московский финансово-юридический университет МФЮА, 2015
© Moscow University of Finance and Law MFUA, 2015

по времени является наиболее удобным инструментом для построения аналитических решений или получения численно-аналитических результатов. Основной сложностью при использовании интегральных преобразований, в частности интегрального преобразования Лапласа, является построение оригинала по известному изображению. Для достаточно широкого набора изображений оригиналы могут быть найдены аналитически. Для этого существуют таблицы интегральных преобразований, соответствующие теоремы теории операционного исчисления и используются свойства интегральных преобразований. Однако не редки случаи, когда получаемые в процессе решения изображения обладают настолько сложной структурой, что их обращение с применением аналитических методов становится нерациональной задачей, хотя, быть может, и принципиально возможной. Возникают также изображения, оригиналы которых построить аналитически не представляется возможным. В этих случаях приходится прибегать к использованию численных методов построения оригиналов.

Одним из направлений развития численных методов обращения интегрального преобразования Лапласа является построение квадратурных формул вычисления интеграла Меллина, восстанавливающего оригинал по известному изображению:

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f^L(s) e^{s\tau} ds. \quad (1)$$

Здесь $f(\tau)$ – искомый оригинал, $f^L(s)$ – изображение, s – параметр преобразования Лапласа, τ – время. Предполагается, что $f^L(s)$ – аналитическая функция при $\operatorname{Re} s > 0$. При этом условии σ – любое положительное число.

Положим $s = \sigma + i\omega$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \frac{e^{\sigma\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f^L(\sigma + i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{e^{\sigma\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\operatorname{Re} f^L(\sigma + i\omega) + i \operatorname{Im} f^L(\sigma + i\omega)] (\cos(\omega\tau) + i \sin(\omega\tau)) d\omega \\ &= \frac{e^{\sigma\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\operatorname{Re} f^L(\sigma + i\omega) \cos(\omega\tau) - \operatorname{Im} f^L(\sigma + i\omega) \sin(\omega\tau)] d\omega \\ &\quad + \frac{e^{\sigma\tau}}{2\pi} i \int_{-\infty}^{+\infty} [\operatorname{Re} f^L(\sigma + i\omega) \sin(\omega\tau) + \operatorname{Im} f^L(\sigma + i\omega) \cos(\omega\tau)] d\omega. \quad (2) \end{aligned}$$

Из формулы прямого преобразования Лапласа легко установить свойства четности функции $\operatorname{Re} f^L(\sigma + i\omega)$ и нечетности функции $\operatorname{Im} f^L(\sigma + i\omega)$ по переменной ω . В самом деле,

$$\begin{aligned} f^L(s) &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \Rightarrow f^L(\sigma + i\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\sigma\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\sigma\tau} \cos(\omega\tau) d\tau - i \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\sigma\tau} \sin(\omega\tau) d\tau \\ &\Rightarrow \operatorname{Re} f^L(\sigma + i\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\sigma\tau} \cos(\omega\tau) d\tau = \operatorname{Re} f^L(\sigma - i\omega), \\ \operatorname{Im} f^L(\sigma + i\omega) &= - \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\sigma\tau} \sin(\omega\tau) d\tau = - \operatorname{Im} f^L(\sigma - i\omega). \end{aligned}$$

Следовательно, мнимая часть в формуле (2) исчезает. Принимая во внимание установленные свойства $\operatorname{Re} f^L(\sigma + i\omega)$ и $\operatorname{Im} f^L(\sigma + i\omega)$, перепишем форму-

лу (2) в следующем виде:

$$f(\tau) = \frac{e^{\sigma\tau}}{\pi} \int_0^{\infty} [\operatorname{Re} f^L(\sigma + i\omega) \cos(\omega\tau) - \operatorname{Im} f^L(\sigma + i\omega) \sin(\omega\tau)] d\omega. \quad (3)$$

Кроме того, $f(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$, что приводит к равенству

$$\int_0^{\infty} [\operatorname{Re} f^L(\sigma + i\omega) \cos(\omega\tau) + \operatorname{Im} f^L(\sigma + i\omega) \sin(\omega\tau)] d\omega = 0, \quad \tau > 0,$$

или эквивалентному ему

$$\frac{e^{\sigma\tau}}{\pi} \int_0^{\infty} [\operatorname{Re} f^L(\sigma + i\omega) \cos(\omega\tau) + \operatorname{Im} f^L(\sigma + i\omega) \sin(\omega\tau)] d\omega = 0, \quad \tau > 0. \quad (4)$$

Прибавляя равенство (4) к (3) и вычитая (4) из (3), приходим к двум выражениям для оригинала:

$$f(\tau) = \frac{2e^{\sigma\tau}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} f^L(\sigma + i\omega) \cos(\omega\tau) d\omega, \quad (5)$$

$$f(\tau) = -\frac{2e^{\sigma\tau}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} f^L(\sigma + i\omega) \sin(\omega\tau) d\omega. \quad (6)$$

Таким образом, формула (3), или (5), или (6) позволяет вычислить оригинал $f(\tau)$ по известным действительной и мнимой частям изображения. В дальнейшем для вычисления оригиналов будем использовать формулу (5).

При решении актуальных нестационарных задач механики деформированного твердого тела с учетом связанности полей различной физической природы [1], механики тел с учетом внутренней микроструктуры (модель Коссера) [2], а также задач электромагнитоупругости [3] и термоупругодиффузии [4] зачастую единственно возможным из известных в настоящий момент аналитических методов построения решений является метод малого параметра.

Предположим, что требуется определить решения $u(r, \tau)$, $E(r, \tau)$ двумерной нестационарной задачи электромагнитоупругости [3], в которой r – пространственная переменная. При использовании метода малого параметра искомые решения представляются в виде степенных рядов:

$$u(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(r, \tau) \alpha^m, \quad E(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} e_m(r, \tau) \alpha^m. \quad (7)$$

Характерной особенностью метода малого параметра является то, что решение исходной задачи сводится к решению бесконечной рекуррентной последовательности более простых подзадач [2], [3] относительно коэффициентов рядов (7).

В работе [3] показано, что изображения по Лапласу коэффициентов этих рядов имеют вид

$$u_0^L(r, s) = B(r_1 s, r s) D^{-1}(s) U_0^L(s), \quad D(s) = B(r_1 s, s), \quad (8)$$

$$B(x, y) = R_{10}(x) R_{10}(-y) e^{y-x} - R_{10}(-x) R_{10}(y) e^{x-y},$$

$$e_m^L(r, s) = -\rho e_0(r) \frac{s}{s + \gamma} u_m^L(r, s), \quad m \geq 0, \quad (9)$$

$$u_m^L(r, s) = -\int_1^{r_1} G^L(r, \xi, s) E_0(\xi) e_{m-1}^L(\xi, s) d\xi, \quad m \geq 1. \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G^L(r, \xi, s) &= -\frac{1}{2\xi r^2} [G_1^L(r, \xi, s)H(\xi - r) + G_2^L(r, \xi, s)H(r - \xi)], \\ G_1^L(r, \xi, s) &= \frac{B(rs, s)B_1(r_1s, \xi s)}{s^3 D(s)}, \quad G_2^L(r, \xi, s) = \frac{B(rs, r_1s)B_1(s, \xi s)}{s^3 D(s)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(x, y) &= R_{10}(x)R_2(-y)e^{y-x} - R_{10}(-x)R_2(y)e^{x-y}, \\ R_2(z) &= R_{20}(z) + R_{10}(z), \quad R_{10}(z) = z + 1, \quad R_{20}(z) = z^2 + 3z + 3. \end{aligned}$$

Анализ функций G_1^L и G_2^L показывает, что многочлены в их числителях и знаменателях имеют одинаковую степень относительно параметра s . Следовательно, оригиналы этих функций содержат обобщенные функции, а сами оригиналы коэффициентов рядов (7) совместно с функцией $G(r, \xi, \tau)$ образуют алгебру со сверткой. Для выделения обобщенных функций из (11) предварительно представляем функции G_1^L и G_2^L в виде рядов по экспонентам:

$$G_j^L(r, s, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{jnk}^L(r, s, \xi) e^{-\tau_{jnk}(r, \xi)s}, \quad j = 1, 2, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} G_{1n1}^L(r, s, \xi) &= -s^{-3}R_3(rs, -\xi s)Y_1^{n+1}(-s)Y_1^{n+1}(r_1s), \quad R_3(x, y) = R_{10}(x)R_2(y), \\ G_{jn2}^L(r, s, \xi) &= s^{-3}R_3(-rs, -\xi s)Y_1^{n+1}(r_1s)Y_1^n(-s), \\ G_{jn3}^L(r, s, \xi) &= s^{-3}R_3(rs, \xi s)Y_1^{n+1}(-s)Y_1^n(r_1s), \quad Y_1(z) = \frac{R_{10}(z)}{R_{10}(-z)}, \\ G_{1n4}^L(r, s, \xi) &= -s^{-3}R_3(-rs, \xi s)Y_1^n(r_1s)Y_1^n(-s), \\ G_{2n1}^L(r, s, \xi) &= G_{1n4}^L(-r, s, -\xi), \quad G_{2n4}^L(r, s, \xi) = G_{1n1}^L(-r, s, -\xi), \\ \tau_{1n1}(r, \xi) &= 2(n+1)h - \xi + r, \quad \tau_{jn2}(r, \xi) = 2(n+1)h + 2 - \xi - r, \\ \tau_{jn3}(r, \xi) &= 2nh - 2 + \xi + r, \quad \tau_{1n4}(r, \xi) = 2nh + \xi - r, \\ \tau_{2n1}(r, \xi) &= \tau_{1n4}(-r, -\xi), \quad \tau_{2n4}(r, \xi) = \tau_{1n1}(-r, -\xi), \quad h = r_1 - 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее, вычисляя пределы

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_{jnk}^L(r, s, \xi) = (-1)^k \xi^2 r, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

записываем функции $G_{jnk}^L(r, s, \xi)$ в виде суммы регулярных $G_{jrnk}^L(r, s, \xi)$ и сингулярных слагаемых:

$$\begin{aligned} G_{jnk}^L(r, s, \xi) &= G_{jrnk}^L(r, s, \xi) + (-1)^k \xi^2 r, \\ G_{1rnk}^L(r, s, \xi) &= G_{1nk}^L(r, s, \xi) - (-1)^k \xi^2 r, \\ G_{2rn1}^L(r, s, \xi) &= G_{1rn4}^L(-r, s, -\xi), \quad G_{2rn4}^L(r, s, \xi) = G_{1rn1}^L(-r, s, -\xi), \\ G_{2rnk}^L(r, s, \xi) &= G_{1rnk}^L(-r, s, -\xi), \quad k = 2, 3. \end{aligned} \quad (14)$$

Подстановка равенств (14) в соотношения (11) приводит к следующему представлению ядра интеграла в (10):

$$G^L(r, s, \xi) = G_r^L(r, s, \xi) + G_s^L(r, s, \xi), \quad (15)$$

где

$$G_r^L(r, s, \xi) = -\frac{1}{2\xi r^2} [G_{sr1}^L(r, s, \xi)H(\xi - r) + G_{sr2}^L(r, s, \xi)H(r - \xi)],$$

$$G_s^L(r, s, \xi) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (-1)^k [e^{-\tau_{1nk}(r, \xi)s} H(\xi - r) + e^{-\tau_{2nk}(r, \xi)s} H(r - \xi)], \quad (16)$$

$$G_{srj}^L(r, s, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{jrnk}^L(r, s, \xi) e^{-\tau_{jnk}(r, \xi)s}, \quad j = 1, 2.$$

В пространстве оригиналов аналоги равенств (9) и (10) с учетом представления (15) и свойств преобразования Лапласа записываются следующим образом (звездочка обозначает свертку по времени):

$$e_m(r, \tau) = -\rho e_0(r) [u_m(r, \tau) - \gamma u_m(r, \tau) * e^{-\gamma\tau}], \quad m \geq 0, \quad (17)$$

$$u_m(r, \tau) = -I_{1m}(r, \tau) + \frac{1}{2} I_{2m}(r, \tau), \quad m \geq 1, \quad (18)$$

где

$$I_{1m}(r, \tau) = \int_1^{r_1} E_0(\xi) G_r(r, \xi, \tau) * e_{m-1}(\xi, \tau) d\xi,$$

$$I_{2m}(r, \tau) = \int_1^{r_1} E_0(\xi) g_{m-1}(r, \xi, \tau) d\xi,$$

$$g_{m-1}(r, \xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (-1)^k [H(\xi - r) e_{m-1}(\xi, \tau - \tau_{1nk}(r, \xi)) + H(r - \xi) e_{m-1}(\xi, \tau - \tau_{2nk}(r, \xi))].$$

В последней формуле учтено, что оригинал функции $e^{-\tau_* s}$ имеет вид $\delta(\tau - \tau_*)$, где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака.

Оригиналы $u_0(r, \tau)$ и $e_0(r, \tau)$ предлагается строить по формулам (8) и (9) с помощью модифицированного алгоритма численного обращения преобразования Лапласа, который излагается далее. При $m \geq 1$, предварительно определяя с помощью указанного алгоритма оригинал $G_r^L(r, \xi, s)$ по формулам (14) и (16), функции $u_m(r, \tau)$ и $e_m(r, \tau)$ находим, используя численное интегрирование в равенствах (17) и (18).

2. Численный алгоритм обращения интегрального преобразования Лапласа

В стандартных программах численного обращения преобразования Лапласа для интегрирования используются методы трапеций или прямоугольников, имеющие недостаточную скорость сходимости. Воспользуемся средствами широко распространенного пакета Maple, отличающегося от стандартных программ. Такой подход представляется рациональным в смысле того, что эти алгоритмы имеют процедуры анализа подынтегральной функции и в зависимости от ситуации выбирают наиболее подходящий метод с учетом контроля размера шага, сильной осцилляции, наличия особенностей и др. При этом формула (5) заменяется приближенным аналогом

$$f(\tau) \approx \frac{2}{\pi} e^{\sigma\tau} \int_0^{\Omega} \operatorname{Re}[f^L(\sigma + i\omega)] \cos(\omega\tau) d\omega, \quad (19)$$

где Ω – достаточно большое положительное число.

Следует отметить, что точность всех без исключения алгоритмов численного обращения, основанных на приближенном вычислении интеграла (19), существенно зависит от значения параметра σ . Единых рекомендаций по его выбору не существует, так как численное обращение преобразования Лапласа является некорректной задачей. Поэтому на практике предварительно проводится подбор значения параметра σ , которое обеспечивает сходимость по числу шагов разбиения промежутка интегрирования и по значению Ω .

При использовании встроенных алгоритмов Maple предлагается сводить эту процедуру к двум этапам. Первый из них состоит в подборе такого значения параметра σ , при котором с увеличением Ω в два раза относительная погрешность результатов, полученных по формуле (19), составляет менее 5%, что обеспечивает сходимость алгоритма. Кроме того, результаты должны изменяться мало при малом изменении параметра σ , что обеспечит практическую устойчивость алгоритма по Ляпунову. Поэтому на втором этапе проводится проверка устойчивости по этому практическому критерию. Полученные значения σ и Ω проверяются на тестовых примерах численного обращения изображений функций, оригиналы которых известны.

Как будет показано далее, алгоритм вычисления оригиналов организован таким образом, чтобы при вычислении интегралов типа свертки появилась возможность воспользоваться прогрессивными средствами работы с векторами и матрицами. При этом операция интегрирования по существу переходит в операцию скалярного умножения.

В основе решения задачи лежат формулы (17) и (18). Алгоритм решения задачи состоит из следующих шагов.

1. *Численное вычисление значений ядра $G_r(r, \xi, \tau)$.* Организуем массив $G_{ilq} = G_r(r_i, \xi_l, \tau_q)$ следующим образом. Определяем множества значений переменных r, ξ, τ : $A_r = \{r: r \in [1, r_1]\}$, $A_\xi = \{\xi: \xi \in [1, r_1]\}$, $A_\tau = \{\tau: \tau \in [0, T]\}$, где T – конечный момент времени. Затем строим конечные аналоги введенных бесконечных множеств. Для этого фиксируем два натуральных числа n_r, n_τ и представляем каждое из множеств A_r, A_ξ в виде $n_r - 1$ непересекающихся отрезков равной длины, а A_τ – в виде $n_\tau - 1$ непересекающихся отрезков равной длины. В результате получаем n_r точек каждого из множеств A_r, A_ξ и n_τ точек множества A_τ (границ отрезков). Эти множества принимаем за конечные аналоги множеств A_r, A_ξ, A_τ и оставляем за ними те же обозначения.

На них определим значения ядра (массив $\mathbf{G} = (G_{ilq})_{n_r \times n_\xi \times n_\tau}$, $n_r = n_\xi$). Структура массива \mathbf{G} представляет собой прямоугольную матрицу $\mathbf{M} = (M_{iq})_{n_r \times n_\tau}$, каждый элемент которой является вектором $M_{iq} = \{G_r(r_i, \xi_l, \tau_q): l = 1, 2, \dots, n_\xi\}$ значений ядра $G_r(r_i, \xi, \tau_q)$ на множестве A_ξ . Далее задаем шаги изменений пространственных и временной переменных $\delta_r = \delta_\xi = (r_1 - 1)/n_r$, $\delta_\tau = T/n_\tau$ и дискретные значения переменных

$$\begin{aligned} r_i &= 1 + (i - 1)\delta_r, & \xi_l &= r_0 + (l - 1)\delta_\xi, & \tau_q &= (q - 1)\delta_\tau, \\ i, l &= 1, 2, \dots, n_r + 1, & q &= 1, 2, \dots, n_\tau + 1. \end{aligned}$$

2. *Вычисление $u_0(r, \tau)$ и $e_0(r, \tau)$.* Используя формулы (8), (9) для изображений и описанный выше алгоритм, формируем две прямоугольные матрицы

$$\mathbf{u}_0 = (u_{0iq})_{n_r \times n_\tau}, \quad \mathbf{e}_0 = (e_{0iq})_{n_r \times n_\tau}, \quad u_{0iq} = u_0(r_i, \tau_q), \quad e_{0iq} = e_0(r_i, \tau_q).$$

3. *Вычисление интеграла I_{2m} в (18).* Во втором слагаемом в (18) сначала формируем вектор $\mathbf{E}_0 = (E_{0l})_{n_\xi \times 1}$, $E_{0l} = E_0(\xi_l)$. Как следует из выражения

для $g_{m-1}(r, \xi, \tau)$, которое переписываем в виде

$$g_{m-1}(r, \xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (-1)^k [H(\xi - r)H(\tau - \tau_{1nk}(r, \xi))e_{m-1}(\xi, \tau - \tau_{1nk}(r, \xi)) + H(r - \xi)H(\tau - \tau_{2nk}(r, \xi))e_{m-1}(\xi, \tau - \tau_{2nk}(r, \xi))], \quad (20)$$

нам понадобятся значения функции $e_{m-1}(\xi, \tau)$ в дискретных точках, сдвинутых во времени на величины $\tau_{1nk}(r, \xi)$ или $\tau_{2nk}(r, \xi)$.

Кроме того, для обеспечения быстрого счета желательно обладать наборами значений $e_{m-1}[\xi, \tau - \tau_{jnk}(r, \xi)]$, $j = 1, 2$, организованными в виде векторов той же размерности, что и \mathbf{E}_0 . Для этого поступим следующим образом. Сначала согласно структуре слагаемых в (20) это выражение будет содержать лишь конечное число слагаемых при любых r, ξ, τ . Поэтому перепишем (20) следующим образом:

$$g_{m-1}(r, \xi, \tau) = \sum_{k=1}^4 \sum_{n=0}^{N_{1k}} (-1)^k [H(\xi - r)e_{m-1}(\xi, \tau - \tau_{1nk}(r, \xi))] + \sum_{k=1}^4 \sum_{n=0}^{N_{2k}} (-1)^k [H(r - \xi)e_{m-1}(\xi, \tau - \tau_{2nk}(r, \xi))]. \quad (21)$$

Величины N_{jk} определяются здесь из решения неравенств

$$\sup_{r, \xi \in [1, r_1], \tau \in [0, T]} (\tau - \tau_{jnk}(r, \xi)) > 0$$

относительно n . Например, для N_{11} с учетом (13) получаем неравенство

$$\sup_{\substack{r, \xi \in [1, r_1] \\ \tau \in [0, T]}} (\tau - \tau_{1n1}(r, \xi)) = \sup_{\substack{r, \xi \in [1, r_1] \\ \tau \in [0, T]}} (\tau - 2(n+1)h + \xi - r) = T - 2nh - h > 0,$$

из которого выводим равенство $N_{11} = [(T - h)/(2h)]$. Здесь и далее функция $[x]$ означает целую часть числа x .

Аналогично находятся остальные числа N_{jk} :

$$N_{j2} = \left\lfloor \frac{T-2}{2h} \right\rfloor, \quad N_{j3} = \left\lfloor \frac{T+2}{2h} \right\rfloor, \\ N_{21} = N_{14} = \left\lfloor \frac{T+h}{2h} \right\rfloor, \quad N_{24} = N_{11} = \left\lfloor \frac{T-h}{2h} \right\rfloor.$$

Далее формируем восемь вспомогательных трехмерных массивов \mathbf{T}_{jk} , $j = 1, 2$, $k = \overline{1, 4}$, – прямоугольных $(n_r \times N_{jk})$ -матриц, элементы которых являются векторами значений величин $\tau_{jnk}(r_i, \xi)$ на множестве A_ξ :

$$\mathbf{T}_{jk} = (\boldsymbol{\tau}_{in})_{n_r \times N_{jk}}, \quad \boldsymbol{\tau}_{in} = \{\tau_{jnk}(r_i, \xi_l) : l = 1, 2, \dots, n_\xi + 1\}.$$

Используя эти массивы, формируем восемь трехмерных массивов размерности $n_r \times N_{jk} \times n_\tau$, каждый элемент которых является вектором индексов $\mathbf{i}_{jnk} = (i_{jnk}^l)_{n_\xi \times 1}$ размерности n_ξ :

$$i_{jnk}^l = i - \left\lfloor \frac{\tau_{jnk}(r_i, \xi_l)}{\delta_\tau} \right\rfloor, \quad \mathbf{i}_{jnk} = \mathbf{i} - \left\lfloor \frac{\boldsymbol{\tau}_{in}}{\delta_\tau} \right\rfloor, \quad \mathbf{i} = \{i\}_{n_\xi \times 1}.$$

По матрице $\mathbf{e}_{m-1} = (e_{m-1,iq})_{n_r \times n_\tau}$, $e_{m-1,iq} = e_{m-1}(r_i, \tau_q)$, для каждой тройки значений (r_i, n, τ_q) формируем вектор $\tilde{\mathbf{e}}_{jnk} = (\tilde{e}_{jkn}^l)_{n_\xi \times 1}$, элементы которого являются элементами матрицы \mathbf{e}_{m-1} с индексами (l, i_{jnk}^l) . При этом если $i_{jnk}^l < 0$, то $\tilde{e}_{jkn}^l = 0$. Затем формируем вектор

$$\hat{\mathbf{e}} = (\hat{e}_l)_{n_\xi \times 1}, \quad \hat{e}_l = \sum_{k=1}^4 \sum_{n=0}^{N_{1k}} (-1)^k H(\xi_l - r_i) \tilde{e}_{1kn}^l + \sum_{k=1}^4 \sum_{n=0}^{N_{2k}} (-1)^k H(r_i - \xi_l) \tilde{e}_{2kn}^l.$$

Окончательно для приближенного вычисления интеграла I_{2m} используем метод прямоугольников: $I_{2m}(r_i, \tau_q) \approx \delta_\xi(\mathbf{E}_0, \hat{\mathbf{e}})$.

4. *Вычисление интеграла I_{1m} в (18)*. По указанной выше матрице \mathbf{e}_{m-1} формируем матрицу $\check{\mathbf{e}}_{m-1} = (\check{e}_{m-1,iq})_{n_r \times n_\tau}$, $\check{e}_{m-1,iq} = e_{m-1,i,n_\tau-q}$, которая получается из матрицы \mathbf{e}_{m-1} путем перестановки столбцов: первый столбец становится последним, второй – предпоследним и т. д. Затем для каждой пары значений (r_i, τ_q) формируем две матрицы $\mathbf{M}_q^i = (M_{lp}^i)_{n_\xi \times q}$, $\hat{\mathbf{e}}_{m-1} = (\hat{e}_{m-1,l,p})_{n_\xi \times q}$, где \mathbf{M}_q^i составлена из первых q элементов (векторов) строки с номером i матрицы \mathbf{M} , а $\hat{\mathbf{e}}_{m-1}$ образована из последних q столбцов матрицы $\check{\mathbf{e}}_{m-1}$ с последующим транспонированием. В результате для сверток по времени используется метод прямоугольников:

$$\mathbf{I}_{1s} = \int_0^{\tau_i} G_r(r, \xi, t) \mathbf{e}_{m-1}(\xi, \tau - t) dt \approx \delta_\tau \mathbf{diag}(\mathbf{M}_q^i, \hat{\mathbf{e}}_{m-1}),$$

где $\mathbf{diag}(\mathbf{A})$ – вектор размерностью $n_\xi \times 1$, составленный из диагональных элементов матрицы \mathbf{A} .

Окончательно приходим к следующему равенству: $I_{1m}(r_i, \tau_q) \approx \delta_\xi(\mathbf{E}_0, \mathbf{I}_{1s})$.

5. *Формирование матриц \mathbf{e}_m и \mathbf{u}_m* . После вычисления интегралов $I_{1m}(r_i, \tau_q)$, $I_{2m}(r_i, \tau_q)$ на множестве $A_r \times A_\tau$ с помощью формулы (18) формируем матрицу $(\mathbf{u}_m)_{n_r \times n_\tau}$. С этой целью сначала строим вектор $\boldsymbol{\rho}_{e0} = (\rho_{e0,i})_{n_r \times 1}$, $\rho_{e0,i} = \rho_{e0}(r_i)$.

Для вычисления свертки в (17) организуем вектор $\mathbf{e}_\gamma = (e_{\gamma,p})_{q \times 1}$, $e_{\gamma,p} = -\gamma e^{-\gamma(q-p)\delta_\tau}$, и методом прямоугольников при каждом значении τ_q численно находим свертку для всех значений r_i , $i = 1, 2, \dots, n_r + 1$:

$$-\gamma u_m(\mathbf{r}, \tau_q) * e^{-\gamma\tau_q} \approx \delta_\tau(\mathbf{u}_m, \mathbf{e}_\gamma).$$

Проходя все значения τ_q , формируем массив $(\mathbf{u}_s)_m)_{n_r \times n_\tau}$, аппроксимирующий функцию $-\gamma u_m(\mathbf{r}, \tau) * e^{-\gamma\tau}$ на множестве $A_r \times A_\tau$.

Затем формируем матрицу \mathbf{e}_m следующим образом. Каждая ее строка является произведением строки матрицы $\mathbf{u}_m + \mathbf{u}_s$ на элемент вектора $\boldsymbol{\rho}_{e0}$, взятый с обратным знаком и номером, равным номеру строки.

3. Примеры расчетов

Аналогично [3] рассмотрим алюминиевую сферу с внутренним радиусом $r_0 = 1$ м и внешним радиусом $r_1 = 2$ м при $E_* = 1$ в/м, что соответствует следующим безразмерным параметрам: $\alpha = 0.5$, $\gamma = 0.566$.

Начальные характеристики электромагнитного поля и возмущение на внутренней поверхности принимаются следующими:

$$\rho_{e0}(r) = \frac{2}{\sqrt{r}}, \quad E_0 = \sqrt{r}, \quad U_0(\tau) = H(\tau),$$

что соответствует изображению $U_0^L(s) = s^{-1}$. Граница T временного интервала принималась равной пяти. Число шагов по пространственной переменной и по времени выбиралось соответственно $n_r = n_\xi = 25$ и $n_\tau = 50$. В расчетах учитывались первые пять членов рядов (7). Учет шестого члена приводит к относительной погрешности, не превышающей одного процента по сравнению с представленными результатами.

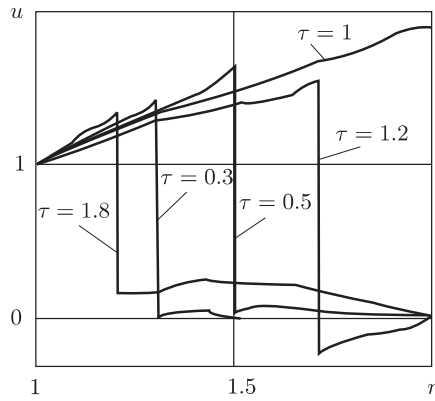


Рис. 1. Распределение перемещений в различные моменты времени

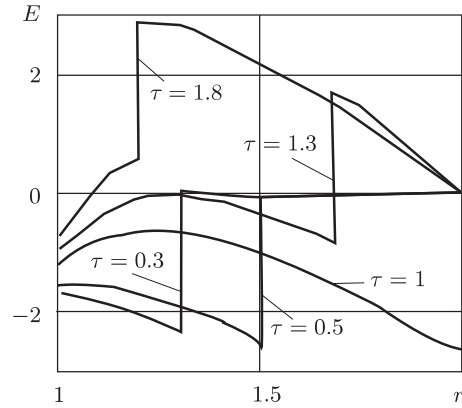


Рис. 2. Распределение напряженности электрического поля в различные моменты времени

На рис. 1, 2 представлены распределения перемещений и напряженности электрического поля по координате r в различные моменты времени.

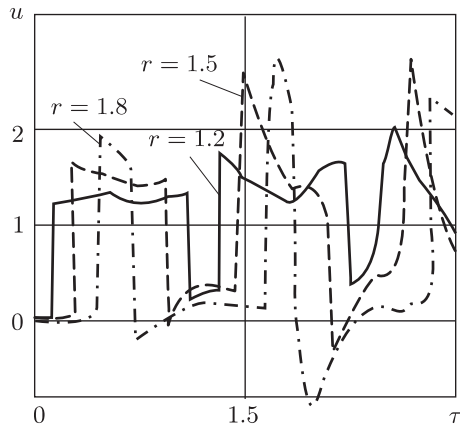


Рис. 3. Зависимость перемещений от времени в различных точках времени

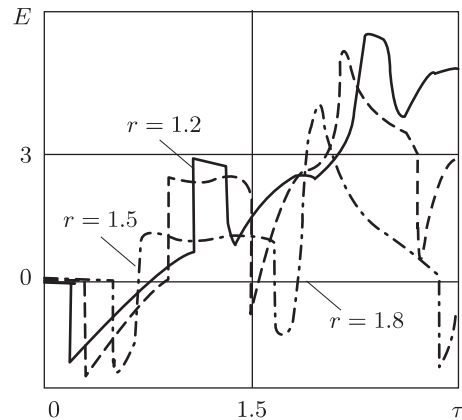


Рис. 4. Зависимость напряженности электрического поля от времени в различных точках

На рис. 3, 4 представлены зависимости перемещений и напряженности электрического поля от времени в точках с различными координатами r . Сплошные кривые соответствуют $r = 1.2$, штриховые – $r = 1.5$, штрихпунктирные – $r = 1.8$.

Список литературы

1. СЕДОВ Л. И. *Механика сплошной среды*. В 2-х т. Наука, М., 1973; англ. пер.: SEDOV L. I. *Mechanics of continuous media*. V. 1, 2. World Sci., River Edge, NJ, 1997.
2. СУВОРОВ Е. М., ТАРЛАКОВСКИЙ Д. В., ФЕДОТЕНКОВ Г. В. *Плоская задача об ударе твердого тела по полупространству, моделируемому средой Коссера*. Прикл. матем. и мех., **76**:5 (2012), 850–859; англ. пер.: SUVOROV YE. M., TARLA KOVSKII D. V., FEDOTENKOV G. V. *The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium*. J. Appl. Math. Mech., **76**:5 (2012), 511–518.
3. ВЕСТЯК В. А., ТАРЛАКОВСКИЙ Д. В. *Одномерные нестационарные волны в толстостенной электромагнитоупругой сфере*. Экологический вестн. научн. центров ЧЭС, 2011, № 4, 16–21.
4. ГОЙХБУРГ Д. М., ЗЕМСКОВ А. В., ТАРЛАКОВСКИЙ Д. В. *Двухкомпонентный упруго диффузионный слой под действием одномерных нестационарных возмущений*. Вестн. Моск. авиационного ин-та, **20**:2 (2013), 226–237.

Владимир Анатольевич Вестяк
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
E-mail: v.a.vestyak@mail.ru

Поступило 11.11.2014

Григорий Валерьевич Федотенков
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
E-mail: greghome@mail.ru

Applied Mathematics and Mathematical Physics
2015, Vol. 1, No. 1, 67–76

Algorithm for the Numerical Laplace Transform Inversion in the Class of Generalized Functions Forming an Algebra with Convolution

V. A. VESTYAK, G. V. FEDOTENKOV

Abstract. The technique of obtaining solutions of non-stationary problems of mechanics using numerical Laplace transform inversion, a method of small parameter and special quadrature formulas for the calculation of integrals like a convolution integral is discussed. The offered approach is applicable to the solution of the new actual non-stationary tasks arising at the accounting of connectivity of fields of various nature at electromagnetoelastic, mechanodiffusive processes, non-stationary connected tasks for bodies and elements of the designs with nonclassical properties.

Keywords: non-stationary problems, numerical inversion of Laplace transform, small parameter method, quadrature formulas.

MSC2010: 76E05



Elasticity Theory of Thin Plates and Active Optics. Solutions for Generating Toroid Surfaces with Vase Forms

GÉRARD R. LEMAITRE

Abstract. The elasticity theory of thin plates is applied to appropriate mirror thickness distributions and external load configurations for generating optical aberration mode corrections. From the analysis and an experiment, it has been shown that the formulation of the net shearing force of this theory, as found in the classical literature, must be corrected as presented in this paper. The new formulation was validated and applied to meniscus form and vase form mirrors generating the correction of third-order astigmatism. Geometrical designs based on vase form thickness distributions also allow obtaining diffraction-limited deformations with a reduced set of four perimeter forces only. These active optics configurations, which show two concentric zones of constant thickness, are useful solutions to generate astigmatism corrections by a saddle-like flexure on flat or spherical surfaces – with glass or metal substrates – providing hyperbolic-paraboloid or toroid shapes respectively.

Keywords: elasticity theory, active optics, toroid surfaces, aspheric mirrors, optical aberrations.

MSC2010: 74-02, 74A99, 74B05, 78A05, 85-02

1. Introduction: elasticity and optics

Elasticity analyses and optical designs of mirrors for astronomy allow the optimization of substrate geometry with appropriate boundary conditions for obtaining an optical surface either by *stress polishing* or by *in-situ stressing*. For materials having a linear stress-strain relationship, such as glass and some metal alloys, these methods provide accurate optical deformation modes which fully satisfy *diffraction-limited criteria*. The highly accurate and remarkably *smooth surfaces* obtained from *active optics* methods allow to built new optical systems that use highly aspheric and non-axisymmetric (sometime called *freeform*) surfaces. The elasticity theory of thin plates is extremely useful for the research and optimization of obtaining aspheric surfaces with constant thickness distribution (CTD), this is mainly because CTD is the only way for superposing many optical modes.

The text submitted by the author in English.

© Московский финансово-юридический университет МФЮА, 2015
© Moscow University of Finance and Law MFUA, 2015

Optimal elasticity configurations can be found by particular flexure of optical modes such as the curvature mode Cv1, represented in cylindrical coordinates by $z = A_{20}r^2$, or the three 3rd-order aberration modes: spherical aberration, coma and astigmatism – Sphe 3, Coma 3, Astm 3 – represented by $z \propto r^4$, $r^3 \cos \theta$, $r^2 \cos(2\theta)$, respectively, or some optical mode of the general form

$$z_{n,m} = A_{nm}r^n \cos(m\theta), \quad (1)$$

where n and m are integers such that $m \leq n$, $n + m$ is even, and $n + m \geq 2$. For $n + m \geq 4$, the *aberration order* of an optical mode is usually defined by the value $n + m - 1$. The two first-order modes Tilt 1 and Cv 1 form the Gaussian terms of optics, or the dioptrics modes. The set of all $z_{n,m}$ optical modes belongs to a triangle matrix called the *Seidel modes*.

Applying a non-uniform load over all the surface of a plate is difficult, so for practical reasons we restrict here to cases of *circular plates* where only an external uniform load ($q = \text{const}$), or nothing ($q = 0$) are applied all over the clear optical aperture of a circular mirror. Generating by flexure a non-axisymmetric mode leads to applying force distributions along the mirror contour – modulated in $m\theta$ azimuthal angle – in order to provide the requested shearing forces and bending moments at the contour boundaries. Axisymmetric and non-axisymmetric flexural modes of a circular plate were first derived by Poisson and Clebsch respectively. These results are reduced to solve the bi-laplacian equation $\nabla^2 \nabla^2 z - q/D = 0$, where D is a constant (called rigidity) related to the plate thickness t by $D \propto t^3$. The flexural modes which are solutions of this equation are called *Clebsch modes*.

Investigations carried out with variable thickness distribution (VTD) circular plates [1] for obtaining Seidel modes generally lead to configurations which do not allow the superposition of the modes, or coadding modes, except for Cv 1 and Astm 1 which both have the same cycloid-like VTD. In order to achieve a high degree of aberration correction, the main goal of optics is to fully benefit from the coaddition capability of elastic modes, then to obtain aspheric optical mirrors which could provide the best imaging quality. Compared to VTDs, the reason of coaddition capability leads us to investigate hereafter only the case of constant thickness distributions (CTD).

Research of configurations where the flexural Clebsch modes have the same form as optical Seidel modes is investigated for two configuration classes: *single thickness* plates and *double concentric zone* plates, with one or two constant zonal thicknesses, i.e., mirror plates belonging to CTDs. For mirrors having a moderate optical power, these configurations are called *meniscus forms* and *vase forms* respectively.

2. Elasticity theory of thin plates with constant thickness distributions (CTDs)

Because of differences in the homogeneity of sign conventions found in books and literature on thin plate deformations, it seems useful to reformulate hereafter the classic theory of thin plates.

For further simplification in the notations, let's denote the *rigidity* D of a plate as related to its thickness t by

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (2)$$

where the Young's modulus E and Poisson's ratio ν are constants depending on the material.

In the case of plates with a variable thickness distribution (VTD) the rigidity D is not a constant. Theoretical investigations of axisymmetric thickness plates – i.e., rigidity of the form $D(r)$ – lead to obtain flexural modes satisfying the Seidel modes with very simple boundary conditions [1], [2]. Nevertheless, due to the extreme difficulty to realize the superposition of these flexural mode, we restrict to the case of constant thickness distributions (CTD), i.e., D is a constant.

Considering CTD plates and a cylindrical coordinate system, the radial and tangential bending moments and the twisting moment, per unit length, can be defined by

$$M_r = D \left[\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right) \right], \quad (31)$$

$$M_t = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \right], \quad (32)$$

$$M_{rt} = M_{tr} = (1 - \nu) D \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial z}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} \right], \quad (33)$$

where a positive flexure entails a positive radial bending moment M_r applied at $r = a$ for generating the fundamental Cv1 mode $z_{20} = A_{20} r^2$ (curvature mode). For z_{nm} modes with $m = n$, we may also verify that M_r is positive in the x, z section, $y = \theta = 0$. This sign convention is natural and in agreement with the generally used optics convention a curved surface z_{20} is of positive curvature if $\forall r, z_{20}(r) > z_{20}(0)$.

Since the Laplacian is

$$\nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}, \quad (4)$$

the bending moments satisfy

$$M_r + M_t = (1 + \nu) D(r, \theta) \nabla^2 z. \quad (5)$$

The determination of radial and tangential shearing forces, Q_r and Q_t respectively, as functions of the flexural moments, is derived from the equilibrium of a segment element $r d\theta dr$ around the tangential axis $O\tau'$ parallel to $\omega\tau$ and around the radial axis $O\omega$ respectively (Fig. 1).

For the radial shearing force Q_r the resulting components around $O\tau'$ are

$$Q_r r d\theta dr + \frac{\partial}{\partial r}(rM_r) d\theta dr - M_t d\theta dr - \frac{\partial M_{rt}}{\partial \theta} d\theta dr = 0,$$

where the third term is the sum of two components tilted of $\pm d\theta/2$ from the radial axis $O\omega$. After simplification and use of equations (3), the radial shearing force is represented by

$$Q_r = -\frac{\partial M_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(M_r - M_t - \frac{\partial M_{rt}}{\partial \theta} \right) = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 z). \quad (6)$$

The tangential shearing force Q_t is derived from the moments around $O\omega$. The resulting components are

$$Q_t r d\theta dr + \frac{\partial M_t}{\partial \theta} d\theta dr - M_{rt} d\theta dr - \frac{\partial}{\partial r}(rM_{rt}) d\theta dr = 0,$$

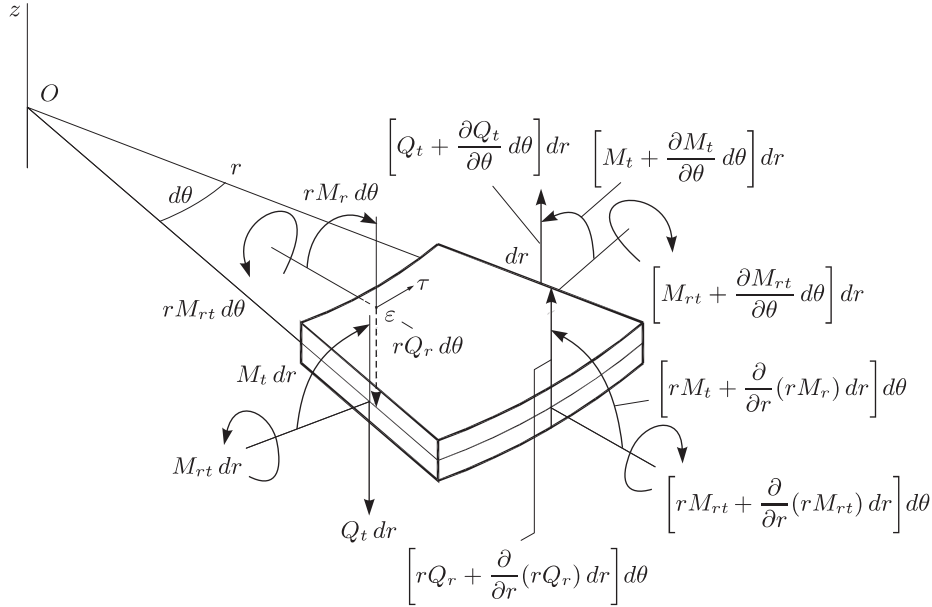


Fig. 1. Bending moments, twisting moment and shearing force providing the equilibrium of plate element $r d\theta dr$

and after simplification and use of equations (3) the tangential shearing force is

$$Q_t = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial M_t}{\partial \theta} - 2 M_{rt} \right) + \frac{\partial M_{rt}}{\partial r} = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 z). \quad (7)$$

The net shearing force V_r , first derived by Kirchhoff [3], [4], takes into account the variation of the twisting moment M_{rt} . Accordingly to the sign convention for the three flexural moments, the net shearing force [5] is¹

$$V_r = Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{rt}}{\partial \theta}. \quad (8)$$

The force V_r , which represents the axial resultant acting at a plate radius r , is useful to define a boundary condition (known as *Kirchhoff's condition*) at the edge:

¹The present positive sign convention for the bending moments M_r and M_t – cf. in detail below equations (3) – provides a logical representation of the flexure. It was used independently by Lubliner and Nelson [6] without comments. However, a negative sign convention has been used by other authors. As shown here in Fig. 1, the variation of the bending moment M_r along the radial direction entails that a positive curvature mode z_{20} is generated by a positive bending moment M_r for increasing values of radius r .

There is an error in *Theory of Plates and Shells* by Timoshenko and Woinowsky-Krieger [7, at Eq. (j), p. 284]: their convention uses a negative sign in the definition of the three moments M_r , M_t and M_{rt} , while the sign of their shearing forces Q_r and Q_t with respect to the Laplacian term is as in above equations (6) and (7). Hence the correctly associated representation of the net shearing force should be $V_r = Q_r + \partial M_{rt}/(r \partial r)$, with their notation.

Several other authors use negative sign convention from [7] or the present positive sign convention in defining the two bending moments, but the torsion moment M_{rt} appears with an opposite sign whatever convention used. In order to respect the equilibrium equations of statics, the sign before M_{rt} is also changed in those equations, so the Poisson biharmonic equation is satisfied. However, there is an error in the sign before $\partial M_{rt}/(r \partial r)$. A similar error in the definition of V_r seems also to appear in the article by E. Reissner [8].

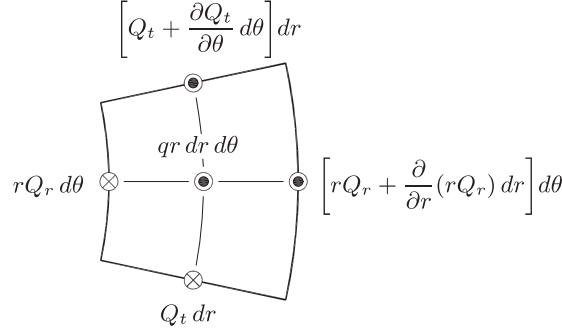


Fig. 2. External uniform load q applied to a plate element and shearing forces providing the equilibrium of a plate element in z -direction

if a plate has a *free edge*, then $V_r = 0$ at its contour. Since D is a constant, after substitution of Q_r and M_{rt} , we obtain

$$V_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 z) + (1 - \nu) D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right). \quad (9)$$

The external uniform load q , applied per unit area onto the surface of the elementary segment, is in static equilibrium with the shearing forces (Fig. 2). After dividing the terms of the equilibrium equation by element area $r d\theta dr$ we have

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r Q_r) + \frac{\partial Q_t}{\partial \theta} \right] + q = 0. \quad (10)$$

This partial derivative equation linking the shearing forces to a uniform load q is a general relation applying either to variable thickness plates (VTD) or constant thickness plates (CTD). Restricting to the case of constant thickness plates for reasons of coaddition mode capability (see Section 1), i.e., D is a constant, we obtain from equations (6) and (7)

$$\nabla^2 \nabla^2 z(r, \theta) - \frac{q}{D} = 0, \quad D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} = \text{const}, \quad (11)$$

which is the fundamental biharmonic equation of thin plate theory of circular plate [7], [8], also called *Poisson's equation* of elasticity.

Case 1. Null uniform load: $q = 0$. The general solutions of equation (11) are of the form

$$Z = R_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} R_{nm} \cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} R'_{nm} \sin(m\theta), \quad (12)$$

where $R_{n0}, R_{n1}, \dots, R'_{n1}, \dots$ are function of the radial distance only. For simplification, we restrict this study to deformation terms with cosine azimuth only, as proposed by equation (1), for obtaining optical modes $z_{n,m}$ (also denoted z_{nm}). Then we consider hereafter only terms where R'_{nm} vanish:

$$R'_{nm}(r) = 0.$$

Quantities $R_{nm}(r)$ are solutions of

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\right) \left(\frac{d^2 R_{nm}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_{nm}}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R_{nm}\right) = 0. \quad (13)$$

For $m = 0$, $m = 1$ and $m > 1$, the functions R_{nm} of the general solutions (called *Clebsch's polynomials* [10]) have the following forms:

$$R_{n0} = B_{n0} + C_{n0} \ln r + D_{n0} r^2 + E_{n0} r^2 \ln r, \quad (14_1)$$

$$R_{n1} = B_{n1} r + C_{n1} r^{-1} + D_{n1} r^3 + E_{n1} r \ln r, \quad (14_2)$$

$$R_{nm} = B_{nm} r^m + C_{nm} r^{-m} + D_{nm} r^{m+2} + E_{nm} r^{-m+2}. \quad (14_3)$$

Case 2. Uniform load: $q = \text{const.}$ The general solution of the biharmonic equation (11) is unique and axisymmetric, i.e., $R_{nm} = 0$ for $m \neq 0$. It is then parented to equation (14₁) but includes a fifth term in r^4 :

$$R_{n0} = \frac{q}{64D} r^4 + B_{n0} + C_{n0} \ln r + D_{n0} r^2 + E_{n0} r^2 \ln r. \quad (14_4)$$

NB The logarithm terms in equations (14₁) and (14₄), $C_{n0} \ln r$ and $E_{n0} r^2 \ln r$, apply to *holed plates*, whilst the $E_{n0} r^2 \ln r$ term alone relates to a *concentrated load acting at the center* of the circular plate.

3. Solution families generating seidel optical modes

One usually characterizes the optical power of a mirror of curvature $1/R$ and clear aperture d by its *aperture-ratio* $f/d = R/(2d)$. For mirrors with relatively low f -ratios, say, $f/5$ (i.e., $f/d = 5$), $f/4$, up to $f/3$, the sag due to its curvature is relatively low, so the stresses induced in the middle surface of the meniscus plate remain very low and do not require using the theory of shallow spherical shells [1]. Assuming that this condition is fulfilled, the thin plate theory is applied to either CTD plane mirrors or CTD meniscus mirrors.

We research configurations able to generate flexure of a CTD circular plate identical to the shape of a wavefront optical mode, also called *Seidel mode*. These modes belong to a circular polynomial series. Each mode is represented by

$$z \equiv z_{nm} = A_{nm} r^n \cos(m\theta), \quad m \leq n, \quad m + n \geq 2, \quad (15)$$

where $m + n$ is even, n and m are integers. Given the condition $m \leq n$, the series development of such optics modes generates the terms of a *triangular matrix*. For low-order modes we use the simple suffix denotation nm instead of n, m . With $m + n = 4$, the three terms coming after the dioptrics are the primary aberration modes z_{40} , z_{31} and z_{22} , i.e., spherical aberration, coma and astigmatism respectively, also denoted Sphe 3, Coma 3 and Astm 3.

The following derivative elements:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = n(n-1)A_{nm}r^{n-2} \cos(m\theta), \quad (16_1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = (n-m^2)A_{nm}r^{n-2} \cos(m\theta), \quad (16_2)$$

$$\nabla^2 z = [n(n-1) + (n-m^2)]A_{nm}r^{n-2} \cos(m\theta), \quad (16_3)$$

allow determining of the bilaplacian $\nabla^2 \nabla^2 z$. After substitution in (11), we obtain

$$A_{nm} (n^2 - m^2)[(n-2)^2 - m^2]r^{n-4} \cos(m\theta) - \frac{q}{D} = 0, \quad n \geq 2. \quad (17)$$

The Clebsch solutions – combinations of n and m for which the equation can be solved for practicable applications (i.e., uniform load $q = 0$ or $q = \text{const}$) – are

$$\begin{aligned} \text{Case 1: } \quad q = 0 & \quad \longrightarrow \quad m = n, & \quad \text{i.e., } z_{22}, z_{33}, z_{44}, \dots \text{ terms,} \\ & \quad \longrightarrow \quad m = n - 2, & \quad \text{i.e., } z_{20}, z_{31}, z_{42}, \dots \text{ terms,} \\ \text{Case 2: } \quad q = \text{const} & \quad \longrightarrow \quad n = 4, m = 0, & \quad \text{i.e., the } z_{40} \text{ term.} \end{aligned} \quad (18)$$

These solutions belong to a *subclass* of Seidel modes to be called *Clebsch–Seidel modes*.

Except for z_{40} mode, the other modes belong to the two lower diagonals of the optics triangular matrix (Fig. 3). The generation of $z_{20} \equiv \text{Cv } 1$, $z_{40} \equiv \text{Sphe } 3$,

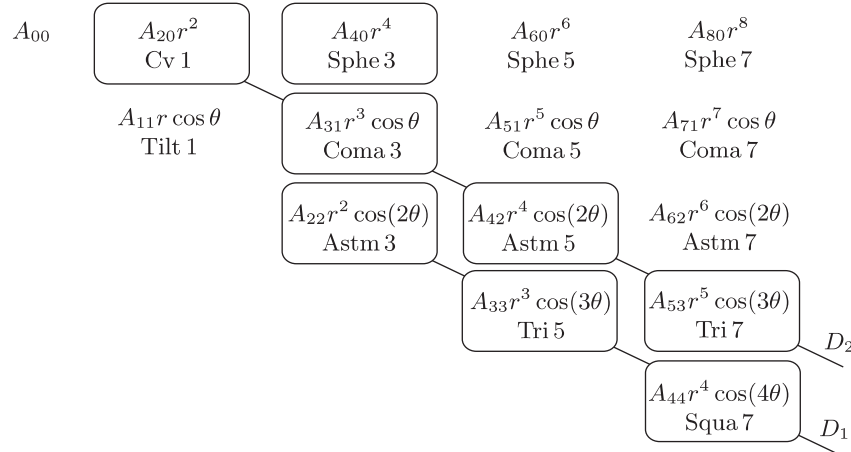


Fig. 3. Triangular matrix of optical Seidel modes. Except for spherical aberration mode Sphe 3, the subclass of Clebsch–Seidel modes (shown in boxes) is represented by the diagonal lines $m = n$ and $m = n - 2$

$z_{31} \equiv \text{Coma } 3$, $z_{22} \equiv \text{Astm } 3$, $z_{42} \equiv \text{Astm } 5$, $z_{33} \equiv \text{Tri } 5$, $z_{53} \equiv \text{Tri } 7$, $z_{44} \equiv \text{Squa } 7$, ... modes is obtained, while it is found not possible to generate the two other 5th-order modes $z_{51} \equiv \text{Coma } 5$ or $z_{60} \equiv \text{Sphe } 5$ by only using $q = 0$ or $q = \text{const}$. Generating z_{51} would require a prismatic loading; generating z_{60} , a parabolic loading. Due to extreme difficulties to achieve them in practice, such non-uniform loading distributions are not considered hereafter.

4. Meniscus form mirrors generating Clebsch–Seidel modes

The bending and twisting moments, as derived from equations (3), are

$$M_r = D[n(n-1) + \nu(n-m^2)]A_{nm}r^{n-2} \cos(m\theta), \quad (19_1)$$

$$M_t = D[n-m^2 + \nu n(n-1)]A_{nm}r^{n-2} \cos(m\theta), \quad (19_2)$$

$$M_{rt} = D[m(n-1)(1-\nu)]A_{nm}r^{n-2} \sin(m\theta). \quad (19_3)$$

By (6) and (9), the radial shearing force Q_r and the net shearing force V_r are

$$Q_r = -D[(n-2)(n^2-m^2)]A_{nm}r^{n-3} \cos(m\theta), \quad (20)$$

$$V_r = -D[(n-2)(n^2-m^2) + (1-\nu)(n-1)m^2]A_{nm}r^{n-3} \cos(m\theta). \quad (21)$$

For each of the first flexural modes, the bending moment M_r and shearing forces Q_r and V_r at the mirror perimeter $r = a$ and at $\theta = 0$ are following:

Mode	n	m	$M_r(a, 0)$	$Q_r(a, 0)$	$V_r(a, 0)$
Cv1	2	0	$2(1+\nu)DA_{20}$	0	0

(22₁)

Sphe 3*	4	0	$4(3+\nu)Da^2A_{40}$	$-32DaA_{40}$	$-32DaA_{40}$
---------	---	---	----------------------	---------------	---------------

(22₂)

Coma 3	3	1	$2(3+\nu)DaA_{31}$	$-8DA_{31}$	$-2(5-\nu)DA_{31}$
--------	---	---	--------------------	-------------	--------------------

(22₃)

Astm 3	2	2	$2(1-\nu)DA_{22}$	0	$-4(1-\nu)Da^{-1}A_{22}$
--------	---	---	-------------------	---	--------------------------

(22₄)

Astm 5	4	2	$12Da^2A_{42}$	$-24DaA_{42}$	$-12(3-\nu)DaA_{42}$
--------	---	---	----------------	---------------	----------------------

(22₅)

Tri 5	3	3	$6(1-\nu)DaA_{33}$	0	$-18(1-\nu)DA_{33}$
-------	---	---	--------------------	---	---------------------

(22₆)

* for Sphe 3 mode, the uniform loading is $q = 64DA_{40}$.

For generating a non-axisymmetric mode, the required boundary conditions at the contour $r = a$ are defined from the associated bending moment $M_r(a, \theta)$ and net shearing force $V_r(a, \theta)$. This requires use of K radial arms *clamped* to the mirror contour (Fig. 4).

The total number K of implemented radial arms depends on the type of mode and on the number of modes to be superposed. The rigidity of the meniscus must be optimized for an admissible stress level of the material. The intensity of axial forces $F_{a,k}$ and $F_{c,k}$ to apply, at $r = a$ and $r = c$ (at the end of radial arms clamped onto the edge), are derived from static equilibrium relationships

$$F_{a,k} + F_{c,k} = a \int_{\pi(2k-3)/K}^{\pi(2k-1)/K} V_r(a, \theta) d\theta, \quad (23_1)$$

$$(c-a)F_{c,k} = a \int_{\pi(2k-3)/K}^{\pi(2k-1)/K} M_r(a, \theta) d\theta, \quad (23_2)$$

$k = 1, 2, \dots, K$ for a mirror having K radial arms.

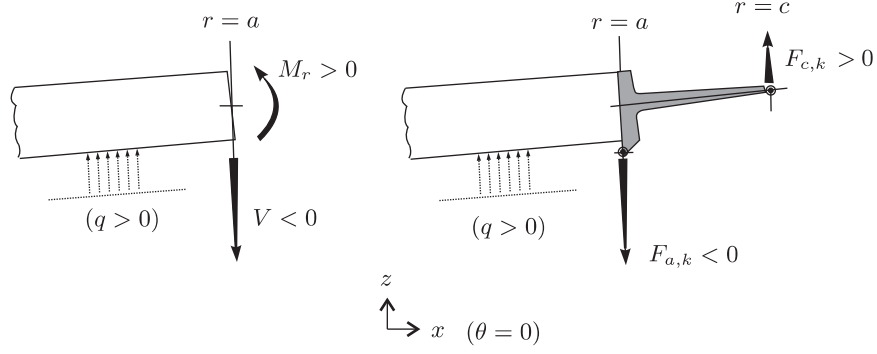


Fig. 4. Sign convention: meniscus form deformable mirror. By K we clamped arms are angularly and uniformly distributed around the mirror. Axial forces $F_{a,k}$ and $F_{c,k}$ act respectively at radii $r = a$ and $r = c$ at the ends of radial arm number k . These forces are derived from M_r and V_r . For the single curvature mode $z = A_{20}r^2$, if A_{20} is positive, then the curvature is positive and the sign convention gives also $M_r > 0$

Coaddition of various modes is obtained by summing the corresponding forces. The resulting forces to apply, $\mathcal{F}_{a,k}$ and $\mathcal{F}_{c,k}$, are

$$\mathcal{F}_{a,k} = \sum_{n,m \text{ modes}} F_{a,k}, \quad \mathcal{F}_{c,k} = \sum_{n,m \text{ modes}} F_{c,k}. \quad (24)$$

The resulting mirror geometry with radial arms built-in along the contour and allowing coaddition of various modes is called hereafter a *multimode deformable mirror*, or MDM.

5. Meniscus form with special arm geometry for the astigmatism mode

The 3rd-order astigmatism aberration, Astm3, is an off-axis aberration which appears on any optical beams reflected by a convex or concave spherical mirror when the principal ray of the beam is not reflected perpendicularly to the mirror surface, i.e., when this beam is deviated by the mirror.

Generating the Astm3 mode by active optics on a meniscus mirror requires use of a minimum number of four radial arms, $K = 4$, angularly distributed at $\theta = 0, \pi/2, \pi$ and $3\pi/2$. This would generally entail applying a set of four forces $F_{a,k}$ at the mirror edge $r = a$ and a set of four forces $F_{c,k}$ at the outer ends of the arms $r = c$. However, a special design with only four $F_{c,k}$ forces can be obtained by ensuring the convenient distributions of $M_r(a, \theta)$ and $V_r(a, \theta)$. Stating that $F_{a,k} = 0$, we obtain from $k = 1$ to $k = 4$, by equations (23),

$$\int_{\pi(2k-3)/4}^{\pi(2k-1)/4} V_r(a, \theta) d\theta = \frac{1}{a-c} \int_{\pi(2k-3)/4}^{\pi(2k-1)/4} M_r(a, \theta) d\theta. \quad (25)$$

After substitution of M_r and V_r by their values in (22₄) the radial value c of the arm end is

$$c = \frac{a}{2}. \quad (26)$$

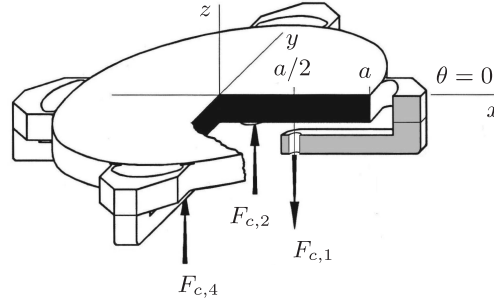


Fig. 5. Configuration of a four-arm meniscus-form mirror generating Astm3 mode. It uses only two pairs of opposite forces $F_{c,1} = -F_{c,2} = F_{c,3} = -F_{c,4}$ acting at radius $c = a/2$ on folded arm ends located in directions x and y . Since $\forall F_{a,k} = 0$, we avoid using eight forces and call it a degenerated configuration. The boundaries are realized via arches linked to the mirror edge by two thin tangential stripes, separated by 22.5° , providing a best azimuth modulation in $\cos(2\theta)$ for generating M_r and V_r .

This very simple geometry reducing the number of forces from eight to four is called *degenerated configuration*. The four arms must be folded towards the mirror center (Fig. 5): *a meniscus form of clear aperture $2a$ provides a pure 3rd-order astigmatic flexure Astm3 by requiring only four alternatively opposite forces $F_{c,k}$ applied to the ends of folded arms at radial distance $c = a/2$.*

The set of four forces $F_{c,k}$ is by itself in equilibrium – or self-reacting. The force intensities and directions are, by (23₁),

$$F_{c,k} = (-1)^k 4(1 - \nu)DA_{22} = (-1)^k \frac{Et^3}{3(1 + \nu)}A_{22}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (27)$$

NB One can show as a general result that Clebsch–Seidel modes with $m = n$, such as Tri5 mode $A_{33}r^3 \cos(3\theta)$, can benefit from these simple degenerated configurations where $F_{a,k} = 0$ [1].

6. Vase form and multimode deformable mirrors (MDMs)

6.1. Saint-Venant’s principle of equivalence and vase form

In order to generate very smooth optical surfaces by active optics, one has to avoid or minimize the effects of local deformations at the regions where the forces are applied. These local deformations are well known from analyses using the thick plate theory [7] which takes into account the shear stresses and shows that the amplitude of the flexure varies along the thickness of the plate and is a maximum where the forces are applied.

With the meniscus plate used in the previous section for correcting astigmatism, the proximity of the forces applied at the mirror contour entails to build a mirror somewhat larger than that of its clear aperture. Another alternative to avoid these local deformations at the mirror surface is to develop a *vase form* design. It is made of two concentric zones, each of them of constant thickness, with the outer ring thicker than the inner meniscus. The diameter of the meniscus corresponds to that of the clear mirror aperture.

Saint-Venant enounced a useful principle which introduced some flexibility for practical applications of the boundary conditions². We recall that a set of forces define a torsor which, at any given point, is globally represented by a resultant force and a resultant moment. An excellent statement of Saint-Venant's principle of equivalence has been given by Germain and Muller [12] as follows: *if one substitutes a first distribution of given surface forces \mathbf{F} , acting on a part $\delta\mathcal{A}_B$ of a boundary area, by a second one acting on the neighborhood and determining the same torsor, whilst the other boundary conditions on the complementary parts of \mathcal{A}_B relatively to \mathcal{A} remain unchanged, then in all regions of \mathcal{A} sufficiently distant from \mathcal{A}_B the stress and strain components are practically unchanged.*

The application of Saint-Venant's principle allows determining *equivalent loading configurations* at the contour of a solid (Fig. 6).

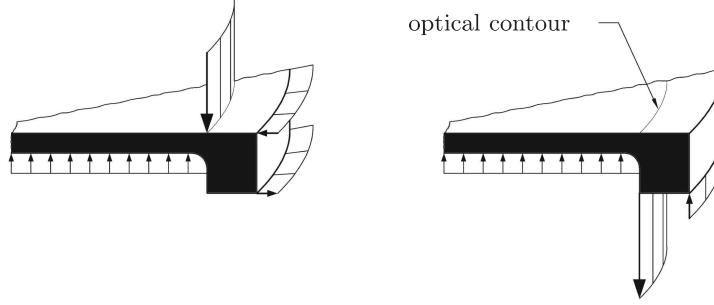


Fig. 6. Saint-Venant's principle of equivalence: example of two equivalent load configurations applied at the boundary of an axisymmetric vase form mirror. The optical clear aperture is that of the junction zone. Configuration on right: local deformations at force application zones will not affect the optical figure

6.2. Vase form and radial arms geometrical design

Let us consider a plane MDM with a clear aperture zone defined by $0 \leq r < a$, a built-in ring zone defined by $a < r \leq b$, where t_1, t_2 and D_1, D_2 are the thicknesses and associated rigidities of the inner and outer zones, respectively. The axial forces applied to the ring inner radius, $r = a$, are denoted by $F_{a,k}$; those applied to the arm outer-end, at $r = c$, by $F_{c,k}$. With a total number of K arms, each arm is numbered by $k \in [1, 2, \dots, K]$ and $k = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$. In addition, positive or negative uniform loads q can be superposed into the vase inner zone by mean of air pressure or depression (Fig. 7).

• *Inner and outer zone – Rigidity ratio.* The constant rigidities of inner and outer zones of the vase form can be denoted by D_1 and D_2 , respectively, where

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{Et_1^3}{12(1-\nu^2)}, & 0 \leq r \leq a, \\ D_2 &= \frac{Et_2^3}{12(1-\nu^2)}, & a \leq r \leq b. \end{aligned} \quad (28)$$

²Saint-Venant first enounced the equivalence principle in *Sur la Torsion des Prismes* [11, p. 298–299].

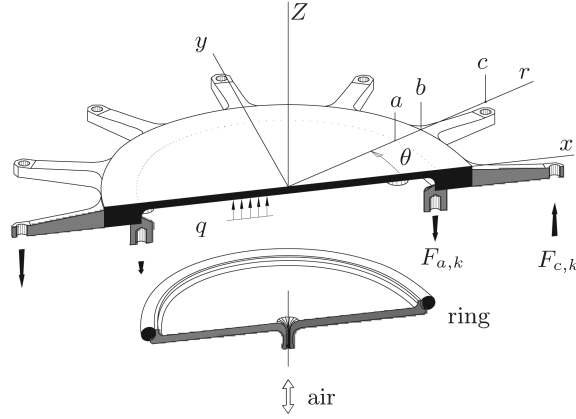


Fig. 7. Elasticity design of a vase form MDM based on two concentric rigidities and radial arms. The clear aperture zone is built-in at $r = a$ into a thicker ring. This holosteric design allows generating and coadding the Clebsch–Seidel deformation modes, Cv 1, Sphe 3, Coma 3, Astm 3, etc., by axial forces $F_{a,k}$ and $F_{c,k}$ applied at the ring inner radius $r = a$ and outer end $r = c$ of K arms

Let us introduce the *rigidity ratio* γ between the two zones as

$$\gamma = \frac{D_1}{D_2} = \frac{t_1^3}{t_2^3}, \quad (29)$$

where $\gamma < 1$ for a vase form.

• *Continuity conditions.* The continuity conditions on z , $\partial z/\partial r$, M_r and V_r at the junction $r = a$, $\forall \theta$ after simplifications are, respectively,

$$A_{nm}a^n = R_{nm}(a), \quad (30_1)$$

$$A_{nm}na^{n-1} = \left[\frac{dR_{nm}}{dr} \right]_{r=a}, \quad (30_2)$$

$$A_{nm} [n(n-1) + \nu(n-m^2)] a^{n-2} = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{d^2 R_{nm}}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dR_{nm}}{dr} - \frac{\nu m^2}{r^2} R_{nm} \right]_{r=a}, \quad (30_3)$$

$$\begin{aligned} & A_{nm} [(n-2)(n^2 - m^2) + (1-\nu)(n-1)m^2] a^{n-3} \\ &= \frac{1}{\gamma} \left[\frac{d^3 R_{nm}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 R_{nm}}{dr^2} - \frac{1+\nu m^2}{r^2} \frac{dR_{nm}}{dr} + \frac{(1+\nu)m^2}{r^3} R_{nm} \right]_{r=a}. \end{aligned} \quad (30_4)$$

The above set allows to determine the constants B_{nm} , C_{nm} , D_{nm} and E_{nm} in equations (14) as functions of A_{nm} , and then the bending moment $M_r(b, \theta)$ and net shearing force $V_r(b, \theta)$ distributions to apply at the ring outer edge $r = b$.

• *First Clebsch–Seidel modes.* For the first Clebsch–Seidel modes, the substitution of each z_{nm} mode into equations (30) and solving of the associate system set lead to the following relation sets:

Curvature 1st-order mode – Cv 1 ($n = 2, m = 0$):

$$\begin{aligned}
B_{20} &= (1 - \gamma)(1 + \nu)(1 - \ln a^2) \frac{a^2 A_{20}}{2}, \\
C_{20} &= (1 - \gamma)(1 + \nu) a^2 A_{20}, \\
D_{20} &= [2 - (1 - \gamma)(1 + \nu)] \frac{A_{20}}{2}, \\
E_{20} &= 0, \\
M_r(b, 0) &= D_2 \left[-(1 - \nu) \frac{C_{20}}{b^2} + 2(1 + \nu) D_{20} \right. \\
&\quad \left. + (3 + \nu) E_{20} + (1 + \nu) E_{20} \ln b^2 \right], \\
Q_r(b, 0) &= -4D_2 \frac{E_{20}}{b}, \\
V_r(b, 0) &= Q_r(b, 0).
\end{aligned} \tag{31_1}$$

Spherical aberration 3rd-order mode – Sphe 3 ($n = 4, m = 0, q = 64D_1 A_{40}$):

$$\begin{aligned}
B_{40} &= \{ \nu + \gamma(5 - \nu) - [(1 + \nu) + \gamma(1 - \nu)] \ln a^2 \} a^4 A_{40}, \\
C_{40} &= 2[(1 + \nu) + \gamma(1 - \nu)] a^4 A_{40}, \\
D_{40} &= [1 - \nu - \gamma(5 - \nu + 4 \ln a^2)] a^2 A_{40}, \\
E_{40} &= 8\gamma a^2 A_{40}, \\
M_r(b, 0) &= D_2 \left[-(1 - \nu) \frac{C_{40}}{b^2} + 2(1 + \nu) D_{40} \right. \\
&\quad \left. + (3 + \nu) E_{40} + (1 + \nu) E_{40} \ln b^2 \right], \\
Q_r(b, 0) &= -4D_2 \frac{E_{40}}{b}, \\
V_r(b, 0) &= Q_r(b, 0).
\end{aligned} \tag{31_2}$$

Coma 3rd-order mode – Coma 3 ($n = 3, m = 1$):

$$\begin{aligned}
B_{31} &= (1 - \gamma)[3 + \nu - (1 - \nu) \ln a^2] \frac{a^2 A_{31}}{2}, \\
C_{31} &= -(1 - \gamma)(1 + \nu) \frac{a^4 A_{31}}{2}, \\
D_{31} &= \gamma A_{31}, \\
E_{31} &= (1 - \gamma)(1 - \nu) a^2 A_{31}, \\
M_r(b, 0) &= D_2 \left[2(1 - \nu) \frac{C_{31}}{b^3} + 2(3 + \nu) D_{31} b + (1 + \nu) \frac{E_{31}}{b} \right], \\
Q_r(b, 0) &= -2D_2 \left[4D_{31} - \frac{E_{31}}{b^2} \right], \\
V_r(b, 0) &= -D_2 \left[-2(1 - \nu) \frac{C_{31}}{b^4} + 2(5 - \nu) D_{31} - (1 + \nu) \frac{E_{31}}{b^2} \right].
\end{aligned} \tag{31_3}$$

Astigmatism 3rd-order mode – Astm 3 ($n = 2, m = 2$):

$$\begin{aligned}
B_{22} &= [4 + (1 - \gamma)(1 - \nu)] \frac{A_{22}}{4}, \\
C_{22} &= -(1 - \gamma)(1 - \nu) \frac{a^4 A_{22}}{12}, \\
D_{22} &= -(1 - \gamma)(1 - \nu) \frac{a^{-2} A_{22}}{6}, \\
E_{22} &= 0, \\
M_r(b, 0) &= 2D_2 \left[(1 - \nu)B_{22} + 3(1 - \nu) \frac{C_{22}}{b^4} + 6D_{22}b^2 - 2\nu \frac{E_{22}}{b^2} \right], \\
Q_r(b, 0) &= -8D_2 \left[3D_{22}b + \frac{E_{22}}{b^3} \right], \\
V_r(b, 0) &= -4D_2 \left[(1 - \nu) \frac{B_{22}}{b} - 3(1 - \nu) \frac{C_{22}}{b^5} \right. \\
&\quad \left. + 3(3 - \nu)D_{22}b + (1 + \nu) \frac{E_{22}}{b^3} \right].
\end{aligned} \tag{31_4}$$

Astigmatism 5th-order mode – Astm 5 ($n = 4, m = 2$):

$$\begin{aligned}
B_{42} &= 3(1 - \gamma)(3 - \nu) \frac{a^2 A_{42}}{4}, \\
C_{42} &= -(1 - \gamma)(1 + \nu) \frac{a^6 A_{42}}{4}, \\
D_{42} &= [\gamma - (1 - \gamma)(1 - \nu)] \frac{A_{42}}{4}, \\
E_{42} &= -3(1 - \gamma)(1 - \nu) \frac{a^4 A_{42}}{4}, \\
M_r(b, 0) &= 2D_2 \left[(1 - \nu)B_{42} + 3(1 - \nu) \frac{C_{42}}{b^4} + 6D_{42}b^2 - 2\nu \frac{E_{42}}{b^2} \right], \\
Q_r(b, 0) &= -8D_2 \left[3D_{42}b + \frac{E_{42}}{b^3} \right], \\
V_r(b, 0) &= -4D_2 \left[(1 - \nu) \frac{B_{42}}{b} - 3(1 - \nu) \frac{C_{42}}{b^5} \right. \\
&\quad \left. + 3(3 - \nu)D_{42}b + (1 + \nu) \frac{E_{42}}{b^3} \right].
\end{aligned} \tag{31_5}$$

Triangle 5th-order mode – Tri 5 ($n = 3, m = 3$):

$$\begin{aligned}
B_{33} &= [2 + (1 - \gamma)(1 - \nu)] \frac{A_{33}}{2}, \\
C_{33} &= -(1 - \gamma)(1 - \nu) \frac{a^6 A_{33}}{8}, \\
D_{33} &= -3(1 - \gamma)(1 - \nu) \frac{a^{-2} A_{33}}{8}, \\
E_{33} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_r(b, 0) &= 2D_2 \left[3(1 - \nu)B_{33}b + 6(1 - \nu)\frac{C_{33}}{b^5} \right. \\
&\quad \left. + 2(5 - \nu)D_{33}b^3 + (1 - 5\nu)\frac{E_{33}}{b^3} \right], \\
Q_r(b, 0) &= -24D_2 \left[2D_{33}b^2 + \frac{E_{33}}{b^4} \right], \\
V_r(b, 0) &= -6D_2 \left[3(1 - \nu)B_{33} - 6(1 - \nu)\frac{C_{33}}{b^6} \right. \\
&\quad \left. + 2(7 - 3\nu)D_{33}b^2 + (1 + 3\nu)\frac{E_{33}}{b^4} \right].
\end{aligned} \tag{31_6}$$

• *Monomode forces* $F_{a,k}$ and $F_{c,k}$. In order to generate the bending moments M_r and net shearing forces V_r at $r = b$ for a given mode z_{nm} , we remark that the MDM design gains in *compactness* by applying axial forces at $r = a$ and $r = c$, not at $r = b$ and $r = c$. For each mode (n, m) , the corresponding axial forces, denoted by $F_{a,k}$ and $F_{c,k}$, are determined from the statics equilibrium equations (see Fig. 7):

$$F_{a,k} + F_{c,k} = b \int_{\pi(2k-3)/K}^{\pi(2k-1)/K} V_r(b, \theta) d\theta, \tag{32_1}$$

$$(a - b)F_{a,k} + (c - b)F_{c,k} = b \int_{\pi(2k-3)/K}^{\pi(2k-1)/K} M_r(b, \theta) d\theta, \tag{32_2}$$

$k = 1, 2, \dots, K$ for a MDM having K arms.

• *Resultant multimode forces* $\mathcal{F}_{a,k}$ and $\mathcal{F}_{c,k}$. The forces $F_{a,k}$ and $F_{c,k}$ are determined for each mode by solving the system (32). The coaddition of various modes is obtained by summing the corresponding forces. The resultant forces $\mathcal{F}_{a,k}$ and $\mathcal{F}_{c,k}$ to apply to the MDM are

$$\mathcal{F}_{a,k} = \sum_{nm \text{ modes}} F_{a,k}, \quad \mathcal{F}_{c,k} = \sum_{nm \text{ modes}} F_{c,k}. \tag{33}$$

7. Vase form MDM with 12 radial arms: experiment and results

A stainless steel MDM with 12 arms ($K = 12$) was designed and built in quenched Fe87Cr13 alloy [1] (Fig. 8). Its optical clear aperture is $2a = 160$ mm. Table 1 displays the geometrical parameters of this MDM and the associated intensities of forces $F_{a,k}$ and $F_{c,k}$ applied at $r = a$ and $r = c$ to generate deflections of $10\mu\text{m}$ peak-to-valley for some Clebsch–Seidel modes. A diagram showing the distribution of Clebsch–Seidel modes of the optical triangular matrix and some He–Ne interferograms obtained with this MDM are displayed by Fig. 9.

Table 1. Distribution of axial forces $F_{a,k}$ and $F_{c,k}$ of a twelve-arm plane MDM ($K = 12$). Quenched Fe87Cr13 stainless steel, $E = 20510^9$ Pa, $\nu = 0.305$, designed with $t_1 = 8$ mm, $\gamma = (t_1/t_2)^3 = 1/27$, $a = 100$ mm, $b/a = 1.24$ and $c/a = 1.6$. The PtV amplitude of each Clebsch-Seidel mode is $w = 0.1$ mm, i.e., $A_{20} = w/a^2$, $A_{40} = w/a^4$, $A_{31} = w/2a^3$, $A_{22} = A_{20}/2$, $A_{42} = A_{40}/2$ and $A_{33} = A_{31}$

Angle	Arm	Cv1		Sphe3*		Coma3		Astm3		Astm5		Tri5	
		nb.	k	$(n = 2, m = 0)$	$(n = 4, m = 0)$	$(n = 3, m = 1)$	$(n = 2, m = 2)$	$(n = 4, m = 2)$	$(n = 3, m = 2)$	$(n = 2, m = 2)$	$(n = 4, m = 2)$	$(n = 3, m = 3)$	
θ	k	$F_{a,k}$	$F_{c,k}$	$F_{a,k}$	$F_{c,k}$	$F_{a,k}$	$F_{c,k}$	$F_{a,k}$	$F_{c,k}$	$F_{a,k}$	$F_{c,k}$	$F_{a,k}$	$F_{c,k}$
0	1	-113.3	113.3	-464.0	302.4	-84.0	71.6	154.0	-17.0	168.2	29.9	792	37.3
$\pi/6$	2	-113.3	113.3	-464.0	302.4	-72.7	62.0	77.0	-8.5	84.1	14.9	0	0
$\pi/3$	3	-113.3	113.3	-464.0	302.4	-42.0	35.8	-77.0	8.5	-84.1	-14.9	-792	-37.3
$\pi/2$	4	-113.3	113.3	-464.0	302.4	0.0	0.0	-154.0	17.0	-168.2	-29.9	0	0
$2\pi/3$	5	-113.3	113.3	-464.0	302.4	42.0	-35.8	-77.0	8.5	-84.1	-14.9	792	37.3
$5\pi/6$	6	-113.3	113.3	-464.0	302.4	72.7	-62.0	77.0	-8.5	84.1	14.9	0	0
π	7	-113.3	113.3	-464.0	302.4	84.0	-71.6	154.0	-17.0	168.2	29.9	-792	-37.3
$7\pi/6$	8	-113.3	113.3	-464.0	302.4	72.7	-62.0	77.0	-8.5	84.1	14.9	0	0
$4\pi/3$	9	-113.3	113.3	-464.0	302.4	42.0	-35.8	-77.0	8.5	-84.1	-14.9	792	37.3
$3\pi/2$	10	-113.3	113.3	-464.0	302.4	0.0	0.0	-154.0	17.0	-168.2	-29.9	0	0
$5\pi/3$	11	-113.3	113.3	-464.0	302.4	-42.0	35.8	-77.0	8.5	-84.1	-14.9	-792	-37.3
$11\pi/6$	12	-113.3	113.3	-464.0	302.4	-72.7	62.0	77.0	-8.5	84.1	14.9	0	0

* The uniform load to generate the Sphe3 mode is $q = 64D_1A_{40} = 0.06172$ MPa.

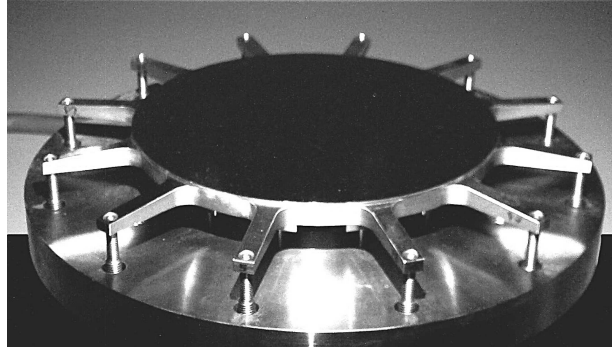


Fig. 8. View of the twelve-arm vase form and plane MDM. Geometrical parameters are $a = 80$ mm, $b/a = 1.25$, $c/a = 1.8125$, $t_1 = 4$ mm, $t_2/t_1 = 1/\gamma^{1/3} = 3$. Elasticity constants of quenched stainless steel Fe87 Cr13 are $E = 2.05 \cdot 10^4$ daN \cdot mm $^{-2}$ and $\nu = 0.305$. Deformation modes are generated by rotation of differential screws at $r = a$ and $r = c$. Air pressure or depressure can be applied onto the rear side of clear aperture $r \leq a$ for generating the Sphe3 mode

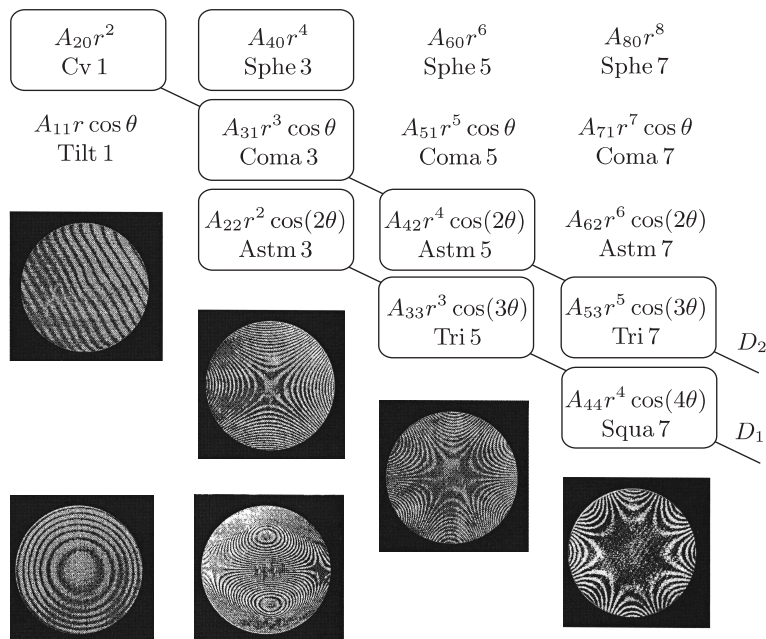


Fig. 9. Upper: Distribution of Clebsch–Seidel modes into the optical triangular matrix (piston z_{00} not shown). When $q = 0$, we obtain $m = n$ modes and $m = n - 2$ modes (D_1 and D_2 diagonal lines). When $q = \text{const}$, we obtain $m = 0$, $n = 4$ mode (upper and second from left).

Lower: He–Ne laser interferograms obtained with the 12-arm vase MDM displayed by Fig. 8.

Upper diagonal boxes: Tilt 1 mode; Astm 3, Tri 5 and Squa 7 modes of D_1 line; lower boxes: Cv 1 and Coma 3 modes of D_2 line

8. Vase form: solutions to generate Astm 3 mode with four forces only

The 3rd-order astigmatism aberration, Astm 3, is caused by the reflection of a non-focused beam on a spherical mirror when the principal ray of the incident beam is not reflected perpendicularly to mirror surface but makes a deviation angle with respect to this incident ray. As a characterization, the reflected beam shows two different curvatures in orthogonal directions.

The correction of Astm 3 can be achieved by use of a deformed plane mirror or a deformed spherical mirror which shape is a *hyperbolic-paraboloid* or a *toroid*, respectively.

Vase form configurations using four forces without arms instead of eight forces with $K = 4$ arms (called degenerated configurations) are presented hereafter for correcting the Astm 3 mode. These configurations bring interesting solutions for practical applications. These solutions, where all $F_{c,k} = 0$, use a vase form and only four forces applied at the rear side of the outer ring.

8.1. Analysis and theoretical results: degenerated configurations

• Forces $F_{a,k}$ applied to the inner edge of the ring. Eliminating $F_{a,k}$ in equations (32), we deduce $F_{c,k}$. After nulling these forces, we obtain for the quadrant centered at $\theta = 0$, i.e., $k = 1$,

$$(b - a) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} V_r(b, \theta) d\theta + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} M_r(b, \theta) d\theta = 0. \quad (34)$$

Since V_r and M_r have the same modulation in $\cos(2\theta)$, this condition leads, for $\theta = 0$, to

$$(b - a)V_r(b, 0) + M_r(b, 0) = 0. \quad (35)$$

After substitution of B_{22} , C_{22} , D_{22} and E_{22} coefficients expressed by equation set (31₄), the net shearing force and radial bending moment at $r = b$ are, respectively,

$$V_r(b, 0) = -2(1 - \nu)D_2A_{22} \left(1 - \frac{a}{b}\right) \left[2 + \frac{1}{2}(1 - \gamma)(1 - \nu) \left(1 - \frac{a^4}{b^4}\right) - (1 - \gamma)(3 - \nu) \frac{b^2}{a^2}\right], \quad (36_1)$$

$$M_r(b, 0) = 2(1 - \nu)D_2A_{22} \left[1 - (1 - \gamma) \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{4}(1 - \gamma)(1 - \nu) \left(1 - \frac{a^4}{b^4}\right)\right]. \quad (36_2)$$

The substitution in equation (35) leads to the condition

$$1 - \frac{a}{b} - \frac{\frac{1}{1-\gamma} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{4}(1-\nu)\left(1 - \frac{a^4}{b^4}\right)}{\frac{2}{1-\gamma} - (3-\nu)\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{2}(1-\nu)\left(1 - \frac{a^4}{b^4}\right)} = 0, \quad (37)$$

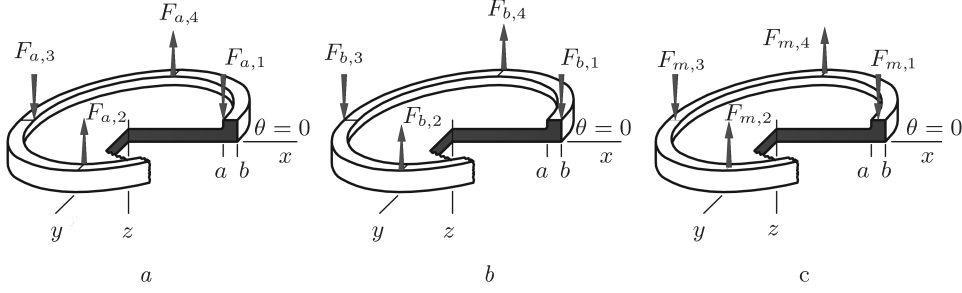


Fig. 10. Vase form configurations generating Astm3 (primary astigmatism mode) $z_{22} = A_{22}r^2 \cos(2\theta)$ with only four forces: *a* – forces $F_{a,k}$ applied to the ring inner edge at $r = a$; *b* – forces $F_{b,k}$ applied to the ring outer edge at $r = b$; *c* – force $F_{m,k}$ applied to the mid-circle of the ring rear surface. This latter configuration is most convenient for practical applications

where $\gamma = D_1/D_2 = (t_1/t_2)^{1/3} < 1$. Although the b/a ratio must be close to unity for practicable reasons, solutions t_2/t_1 can be found for $a < b < 1.15a$ (Fig. 10; Table 2).

Table 2. Solutions for vase form mirror geometries generating the Astm3 mode z_{22} with only four forces $F_{a,k}$, i.e., $\forall F_{c,k} = 0$, applied at the inner edge $r = a$ of the ring. The ratios b/a and t_2/t_1 are given with respect to Poisson's coefficient ν

b/a	t_2/t_1		
	$\nu = 0.15$	$\nu = 0.20$	$\nu = 0.30$
1.050	2.21	2.22	2.23
1.075	1.96	1.96	1.97
1.100	1.80	1.80	1.81
1.125	1.69	1.69	1.70
1.150	1.60	1.61	1.62

• Forces $F_{b,k}$ applied to the outer edge of the ring. Assuming that the forces applied to each end of radial arms at $r = b$ and $r = c$ are denoted $F_{b,k}$ and $F_{c,k}$, respectively, the equations for statics equilibrium read, for $k = 1, 2, 3, 4$,

$$F_{b,k} + F_{c,k} = b \int_{\pi(2k-3)/4}^{\pi(2k-1)/4} V_r(b, \theta) d\theta, \quad (38_1)$$

$$(c - b)F_{c,k} = b \int_{\pi(2k-3)/4}^{\pi(2k-1)/4} M_r(b, \theta) d\theta. \quad (38_2)$$

Researching a condition for nulling $F_{c,k}$, from (31) and (14₃) we have for the outer ring

$$M_r = D_2 \left[\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right) \right], \quad (39)$$

$$z = R_{22} \cos(2\theta) = (B_{22}r^2 + C_{22}r^{-2} + D_{22}r^4 + E_{22}) \cos(2\theta), \quad (40)$$

where the rigidity D_2 of the outer ring is a constant. This leads to

$$M_r = 2D_2[(1 - \nu)B_{22} + 3(1 - \nu)C_{22}r^{-4} + 6D_{22}r^2] \cos(2\theta). \quad (41)$$

The integration on θ from $-\pi/4$ to $\pi/4$ of equation (38₂) is not necessary since one searches to null M_r for nulling $F_{c,k}$. Then, using the analytical value of coefficients B_{22}, C_{22}, D_{22} and E_{22} in (31₄), a necessary condition is given by $M_r(r = b, \theta = 0) = 0$. After substitution and simplification, we obtain the condition

$$\frac{4}{1 - \gamma} + 1 - \nu - (1 - \nu)\frac{a^4}{b^4} - 4\frac{b^2}{a^2} = 0, \quad (42)$$

where $\gamma = D_1/D_2 = (t_1/t_2)^{1/3} < 1$.

This equation allows solutions t_2/t_1 for b/a -ratios such as $1 < b/a < 1.15$ (Fig. 10, *b*; Table 3).

Table 3. Solutions for vase form mirror geometries generating the Astm 3 mode z_{22} with only four forces $F_{b,k}$, i.e., $\forall F_{c,k} = 0$, applied at the outer edge $r = b$ of the ring. The ratios b/a and t_2/t_1 are given with respect to Poisson's coefficient ν

b/a	t_2/t_1		
	$\nu = 0.15$	$\nu = 0.20$	$\nu = 0.30$
1.050	2.54	2.52	2.47
1.075	2.21	2.19	2.15
1.100	2.00	1.98	1.95
1.125	1.85	1.84	1.82
1.150	1.74	1.73	1.71

• *Forces $F_{m,k}$ applied to the mid-circle of the ring rear area.* For practical reasons it has been found convenient to achieve the astigmatism deformation Astm 3 of a vase form mirror with four orthogonal forces $F_{m,k}$ applied at the mid-circle $r = \frac{1}{2}(a + b)$ of the rear side of the outer ring (Fig. 10, *c*). The corresponding vase form geometries with $F_{c,k} = 0$ can be deduced by adopting the mean values t_2/t_1 of previous Tables 2, 3 (Table 4).

Table 4. Solutions for vase form mirror geometries generating the Astm 3 mode $z_{22} = A_{22}r^2 \cos(2\theta)$ with only four forces $F_{m,k}$ applied at the mid-circle $r = \frac{1}{2}(a + b)$ of the rear surface of the ring. The ratios b/a and t_2/t_1 are given with respect to Poisson's coefficient ν

b/a	t_2/t_1		
	$\nu = 0.15$	$\nu = 0.20$	$\nu = 0.30$
1.050	2.38	2.37	2.35
1.075	2.08	2.07	2.06
1.100	1.90	1.89	1.88
1.125	1.77	1.76	1.76
1.150	1.67	1.67	1.66

8.2. Boundary conditions for practical applications

The above solutions for generating the Astm3 mode provide a pure and accurate parabolic flexure in radial directions, however obtaining an accurate $\cos(2\theta)$ modulation along the perimeter surface requires use of appropriate boundary conditions. Since each of four $F_{m,k}$ forces are discrete, as results from integrations of a continuous force distribution $f \cos(2\theta) d\theta$ which should be applied all along the perimeter, it is preferable not to apply the four forces directly to the outer ring but to adopt one of the following alternative designs.

- *Outer ring with variation of the axial thickness.* The rear side of the ring departs from a flat surface and shows four wedged shapes where each forces $F_{m,k}$ are applied. The variation of the axial thickness t_2 along the ring distributes a smooth and accurate flexure in $\cos(2\theta)$ with only four forces applied at the wedges. The axial thickness $t_2(\theta)$ in a quadrant, designed and optimized by Hugot et al. [13], [14], is

$$t_2(\theta) = \lambda t_1 \left[\frac{1/2 - 2\theta/\pi}{\cos(2\theta)} \right]^{1/3}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (43)$$

which satisfies $t_2(\theta) = t_2(\pi/2 - \theta)$ and leads to $t_2(0)/t_2(\pi/4) = \sqrt[3]{\pi/2} = 1.162\dots$, and where λ is a constant depending on b/a , ν and E . In fact, the four wedges are not made angularly sharp but show a square flat area to allow sealing a removable metal part used for the force applications with springs (Fig. 11). This alternative vase form has been designed and built for three spherical concave mirrors in Zerodur ($\nu = 0.24$) and it is bring to various toroid shapes by stress figuring. These off-axis mirrors belong to the main optical train of SPHERE, the new planet finder instrument of ESO's VLT.

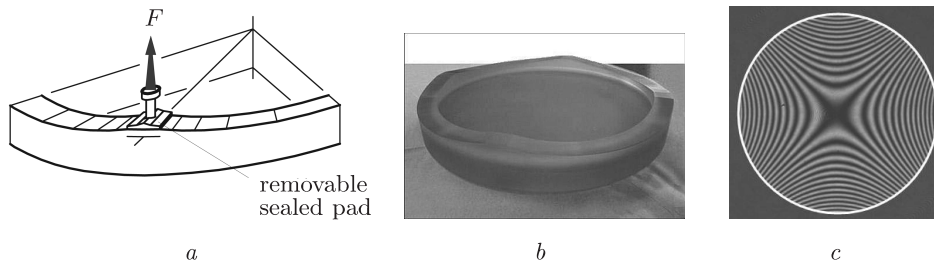


Fig. 11. *a* – alternative design for obtaining a pure $\cos(2\theta)$ modulation of the flexure with four discrete axial forces $F_{m,k}$ applied to a four-wedged outer ring of thickness $t_2(\theta)$; *b* – view of one of three Zerodur toroid mirrors of the SPHERE planet finder optical train installed at ESO's VLT; *c* – He–Ne interferogram of the Astm3 saddle-like aspherisation after stress polishing and elastic relaxation

- *Outer ring with forces acting on angular bridges.* In this alternative design one still has a ring of constant thickness t_2 , but instead of directly applying the external force $F_{m,k}$ in a direction where the angular modulations are at maximum amplitude, one

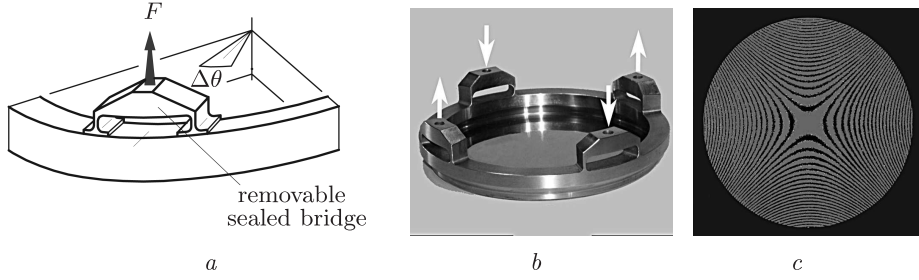


Fig. 12. *a* – alternative design for obtaining a pure $\cos(2\theta)$ modulated flexure by keeping the ring axial thickness $t_2 = \text{const}$, the four forces $F_{m,k}$ are subdivided into eight forces via orthogonal bridges with $\Delta\theta = 22.5^\circ$ angular arch separation; *b* – view of the one-piece stainless steel matrix for making concave toroid gratings, via replicas, for the single surface spectrographs CDS and UVCS of the SOHO Mission; *c* – He-Ne fringes of the Astm 3 saddle-like aspherisation

subdivides each forces into two equal force components via bridges linked to the ring. Each of four forces acts at the center of a bridge. The two arch feet are linked to the ring by tangentially thin ends that are equivalent to articulations. These bridges can be made of metal and removable for glass mirror substrates. A smooth and accurate $\cos(2\theta)$ modulation of the flexure is achieved when the angular separation of the two arch ends is $\Delta\theta = \pi/16 = 22.5^\circ$.

Deformable active matrices with four bridges (Fig. 12) were first designed and built for making (via replications process) the toroid gratings of *single surface* spectrographs CDS and UVCS of the SOHO Mission (ESA/NASA) for solar studies at Lagrange point L_1 . In this case, the thickness t_1 was not a constant but of the cycloid-like form $(1 - r^2/a^2)^{1/3}$ simply supported by thin collar to the outer ring [1].

For applications, a detailed geometry of each above *vase form* alternatives can be optimized with finite element analysis. Besides, we make a design under the maximum admissible stress σ_{ult} of the material substrate, so it is useful to determine the bending force intensities. Starting from equation (38₁), using equation set (31₄), and assuming that b and a are about similar, i.e., $F_{m,k} \simeq F_{b,k}$, we obtain as a first approximation for $k = 1$

$$F_{m,1} \simeq F_{b,1} = -(1-\nu)(1-\gamma) \left[\frac{4}{1-\gamma} + 1 - \nu + (1-\nu) \frac{a^4}{b^4} - 2(3-\nu) \frac{b^2}{a^2} \right] D_2 A_{22}. \quad (44)$$

From condition given by equation (42), for the four forces we have

$$F_{m,k} = -(-1)^k 2(1-\nu)^2 (1-\gamma) \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{a^4}{b^4} \right) D_2 A_{22}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (45)$$

This set of forces is by itself in static equilibrium, i.e., self-reacting.

9. Conclusions

Deformable vase form substrates can provide a highly accurate flexure for correcting the primary astigmatism aberration Astm 3 within diffraction limited criteria. Two alternative boundary configurations applied to this design allow use of four self-reacting forces only if they are located far from the optical surface in agreement with Saint-Venant's principle.

The substrate material can be either a vitro-ceram glass such as Zerodur or a metal alloy with linear stress-strain relationship as chromium stainless steel in a quenched state. Vase form designs will find many applications for large telescope mirror segments used off-axis and also in astronomical optics as off-axis mirrors of unobstructed planet finder instruments and for obtaining saddle-shaped concave gratings used in spectrographs [1], [15].

More generally, other Clebsch-Seidel modes $r^n \cos(m\theta)$, such as those with $m = n$, can be also accurately generated from vase form geometries and by use of four forces only.

The author is grateful to Patrice Joulié for the execution of drawings in the figures.

References

1. LEMAITRE G. R. *Astronomical optics and elasticity theory – active optics methods*. Springer, Berlin, 2010.
2. LEMAITRE G. R. *Compensation des aberrations par élasticité*. *Nouv. Rev. Opt.*, **5-6** (1974), 361–366.
3. KIRCHHOFF G. R. *Über das gleichewicht und die bewegung iener elastischen scheinbe*. *J. Crelle*, **40** (1850), 51–88.
4. KIRCHHOFF G. R. *Vorlesungen über mathematische physik: Mechanik*. Teubner, Leipzig, 1877.
5. LEMAITRE G. R. *Active optics: Vase or meniscus multimode mirrors and degenerated monomode configurations*. *Meccanica*, **40:3** (2005), 233–249.
6. LUBLINER J., NELSON J. E. *Stress mirror polishing*. *Appl. Opt.*, **19:14** (1980), 2332–2340.
7. TIMOSHENKO S.P., WOJNOWSKY-KRIEGER S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 1959.
8. REISSNER E. *Stresses and small displacements of shallow spherical shells*. I. II. *J. Math. Phys.*, **25** (1946), 80–85; 279–300.
9. LANDAU L.D., LIFSHITZ E. M. *Theory of elasticity*. Pergamon Press, Oxford, 1970; transl. from Rus.: *Théorie de l'Elasticité*, Mir, M., 1967.
10. CLEBSCH A. R. F. *Theorie der elasticität fester Körper*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1862; French transl.: DE SAINT-VENANT B. A. J.-C., FLAMANT A. *Théorie de l'Elasticité des Corps Solides*, Dunod, Paris, 1883.
11. DE SAINT-VENANT B. A. J.-C. *Mémoire sur la Torsion des Prismes*. *Mémoire des Savants Étrangers Acad. Sci. Paris*, **14** (1855), 233–560.
12. GERMAIN P., MULLER P. *Introduction à la Mécanique des Milieux Continus*. Masson, Paris, 1995.

13. HUGOT E., FERRARI M., EL HADI K., VOLA P., GIMENAZ J.-L., LEMAITRE G. R., RABOU P., DOHLEN K., BEUZIT J.-L., HUBIN N. *Active Optics: stress polishing of toric mirrors for the VLT SPHERE adaptive optics system*. Appl. Opt., **48** (2009), 2932–2941.
14. HUGOT E., FERRARI M., EL HADI K., COSTILLE A., DOHLEN K., PUJET P., BEUZIT J.-L. *Active optics methods for exoplanet direct imaging. Stress polishing of supersmooth aspherics for VLT-SPHERE planet finder*. Astron. Astrophys., **538** (2012), A139, 4 pp.
15. LEMAITRE G. R. *Active optics with a minimum number of actuators*. Adv. Opt. Tech., **3:3** (2014), 223–249.

GÉRARD R. LEMAITRE
Laboratoire d'Astrophysique de Marseille,
Marseille, France, EU
E-mail: gerard.lemaitre@lam.fr

Received 05.01.2015



УДК 539.3

Некоторые варианты уравнений микрополярных теорий оболочек

М. У. НИКАБАДЗЕ

Представлено Д. В. Георгиевским

Аннотация. Рассмотрены некоторые вопросы параметризации области оболочки при произвольной базовой поверхности. Исходя из трехмерных уравнений микрополярного деформируемого твердого тела, получены соответствующие уравнения микрополярных теорий оболочек, оболочек класса TS и призматических оболочек. В частности, выведены уравнения микрополярной (расширенной микрополярной) теории оболочек относительно тензоров усилий и моментов (тензоров усилий, моментов и моментов второго порядка). Эти уравнения, а также уравнения микрополярных теорий оболочек класса TS и призматических оболочек получены относительно контравариантных компонент указанных выше тензоров. Выведены граничные условия физического содержания.

Ключевые слова: микрополярная теория оболочек, расширенная микрополярная теория оболочек, тензор усилий, тензор моментов, тензор моментов второго порядка.

1. К параметризации области оболочки

Рассматривается классическая параметризация [1]–[3] области оболочки. Применяются обозначения, использованные в работе [4] и обычные правила тензорного исчисления [1], [3], [5]–[10]. В качестве базовой рассматривается регулярная поверхность S , относительно которой область оболочки расположена несимметрично [2]. В таком случае радиус-вектор произвольной точки оболочки можно задать соотношением

$$\hat{\mathbf{r}}(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{r}(x^1, x^2) + x^3 \mathbf{n}(x^1, x^2), \quad -\overset{(-)}{h}(x^1, x^2) \leq x^3 \leq \overset{(+)}{h}(x^1, x^2), \quad (1)$$

где $\mathbf{r}(x^1, x^2)$ – радиус-вектор точки базовой поверхности S , которая не является срединной поверхностью; $\mathbf{n}(x^1, x^2)$ – единичный вектор нормали к базовой поверхности S ; x^1, x^2 – гауссовы координаты на S ; x^3 – поперечная координата. Очевидно, $h(x^1, x^2) = \overset{(-)}{h}(x^1, x^2) + \overset{(+)}{h}(x^1, x^2)$ представляет толщину оболочки в точке $(x^1, x^2) \in S$. В дальнейшем будем предполагать, что $\overset{(-)}{h}(x^1, x^2)$

и $\overset{(+)}{h}(x^1, x^2)$ – кусочно гладкие неотрицательные функции гауссовых координат x^1, x^2 .

При $x^3 = -\overset{(-)}{h}(x^1, x^2)$ первое соотношение в (1) определяет поверхность, которую обозначим через $\overset{(-)}{S}$ и назовем *внутренней поверхностью* оболочки, а поверхность, определяемую тем же соотношением при $x^3 = \overset{(+)}{h}(x^1, x^2)$ и обозначаемую через $\overset{(+)}{S}$, назовем *внешней поверхностью*. Поверхности $\overset{(-)}{S}$ и $\overset{(+)}{S}$ также называются *лицевыми поверхностями* оболочки. Введем обозначения

$$\overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) = \hat{\mathbf{r}}(x^1, x^3, -\overset{(-)}{h}), \quad \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) = \hat{\mathbf{r}}(x^1, x^3, \overset{(+)}{h});$$

тогда векторные параметрические уравнения поверхностей $\overset{(-)}{S}$ и $\overset{(+)}{S}$ соответственно представятся в виде

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) &= \mathbf{r}(x^1, x^2) - \overset{(-)}{h}(x^1, x^2)\mathbf{n}(x^1, x^2), \\ \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) &= \mathbf{r}(x^1, x^2) + \overset{(+)}{h}(x^1, x^2)\mathbf{n}(x^1, x^2). \end{aligned} \quad (2)$$

В дальнейшем будут рассмотрены граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях. Для этого необходимо определить единичные векторы нормалей в точках лицевых поверхностей. Найдем выражения векторов ковариантных базисов на этих поверхностях. Пусть

$$\mathbf{r}_I^- = \partial_I \overset{(-)}{\mathbf{r}} = \frac{\partial \overset{(-)}{\mathbf{r}}}{\partial x^I}, \quad \mathbf{r}_I^+ = \partial_I \overset{(+)}{\mathbf{r}} = \frac{\partial \overset{(+)}{\mathbf{r}}}{\partial x^I};$$

тогда для векторов ковариантных базисов внутренней $\overset{(-)}{S}$ и внешней $\overset{(+)}{S}$ поверхностей из уравнений (2) следуют соотношения

$$\mathbf{r}_I^- = (g_I^J + \overset{(-)}{h} b_I^J)\mathbf{r}_J - \partial_I \overset{(-)}{h} \mathbf{n}, \quad \mathbf{r}_I^+ = (g_I^J - \overset{(+)}{h} b_I^J)\mathbf{r}_J + \partial_I \overset{(+)}{h} \mathbf{n}. \quad (3)$$

При записи формул (3) были учтены формулы Вейнгартена $\mathbf{n}_I = -b_I^J \mathbf{r}_J$; b_I^J – компоненты второго тензора \mathbf{b} поверхности S . Легко показать, что компоненты переноса единичного тензора второго ранга $g_i^j = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}^j$ и $g^{\hat{I}}_J = \mathbf{r}^{\hat{I}} \cdot \mathbf{r}_J$, где $\mathbf{r}_{\hat{I}} = \partial_{\hat{I}} \hat{\mathbf{r}}$, $\mathbf{r}^{\hat{I}} = \sqrt{\hat{g}^{-1}} \varepsilon^{\hat{I}J} \mathbf{r}_J \times \mathbf{n}$, представляются в виде [4]

$$g_i^j = g_i^j - x^3 b_i^j, \quad g^{\hat{I}}_J = \hat{\vartheta}^{-1} A^{\hat{I}}_J = \hat{\vartheta}^{-1} [(1 - 2Hx^3)g_J^I + x^3 b_J^I], \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A^{\hat{I}}_J &= \varepsilon^{IK} \varepsilon_{JL} g_K^L = (1 - 2Hx^3)g_J^I + x^3 b_J^I, \\ \hat{\vartheta} &= \sqrt{\hat{g}^{-1}} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\hat{I}J} \varepsilon_{KL} g_{\hat{I}}^K g_J^L = 1 - 2Hx^3 + K(x^3)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\sqrt{\hat{g}} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}$, $\sqrt{g} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}$, $H = 2^{-1} I_1(\mathbf{b}) = 2^{-1}(k_1 + k_2)$ – средняя кривизна, а $K = \det(\mathbf{b}) = k_1 k_2$ – гауссова кривизна базовой поверхности S ,

k_1 и k_2 – главные кривизны базовой поверхности, ε^{IJ} и ε_{KL} – символы Леви-Чивиты. В силу первого соотношения в (4) имеем

$$g_I^J = g_I^J \Big|_{x^3=-h}^{(-)} = g_I^J + {}^{(-)}h b_I^J, \quad g_I^J = g_I^J \Big|_{x^3=h}^{(+)} = g_I^J - {}^{(+)}h b_I^J. \quad (6)$$

Далее, вводя обозначения $g_I^3 = -\partial_I {}^{(-)}h$, $g_I^3 = \partial_I {}^{(+)}h$ и учитывая (6), запишем соотношения (3) в краткой форме:

$$\mathbf{r}_I^- = g_I^k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_I^+ = g_I^k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{n}. \quad (7)$$

Теперь нетрудно найти выражения для единичных векторов нормалей $\mathbf{n}^{(-)}$ и $\mathbf{n}^{(+)}$ к поверхностям S^- и S^+ , которые определяются формулами

$$\mathbf{n}^{(-)} = -(\mathbf{r}_1^- \times \mathbf{r}_2^-) |\mathbf{r}_1^- \times \mathbf{r}_2^-|^{-1}, \quad \mathbf{n}^{(+)} = (\mathbf{r}_1^+ \times \mathbf{r}_2^+) |\mathbf{r}_1^+ \times \mathbf{r}_2^+|^{-1}. \quad (8)$$

Действительно, на основании (7) векторное произведение в числителях (8) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^- \times \mathbf{r}_2^- &= \sqrt{g} \left(\varepsilon^{IJ} \varepsilon_{KL} g_I^3 g_J^K \mathbf{r}^L + \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon_{KL} g_I^K g_J^L \mathbf{n} \right), \\ \mathbf{r}_1^+ \times \mathbf{r}_2^+ &= \sqrt{g} \left(\varepsilon^{IJ} \varepsilon_{KL} g_I^3 g_J^K \mathbf{r}^L + \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon_{KL} g_I^K g_J^L \mathbf{n} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Из второго соотношения в (4) и формулы (5) находим

$$\begin{aligned} g_L^{\bar{I}} &= g_L^{\hat{I}} \Big|_{x^3=-h}^{(-)} = \vartheta^{-1} A_L^{\bar{I}}, & g_L^{\dagger} &= g_L^{\hat{I}} \Big|_{x^3=h}^{(+)} = \vartheta^{-1} A_L^{\dagger}, \\ A_L^{\bar{I}} &= A_L^{\hat{I}} \Big|_{x^3=-h}^{(-)} = \varepsilon^{IJ} \varepsilon_{LK} g_J^K, & A_L^{\dagger} &= A_L^{\hat{I}} \Big|_{x^3=h}^{(+)} = \varepsilon^{IJ} \varepsilon_{LK} g_J^K, \\ \vartheta^{-1} &= \hat{\vartheta} \Big|_{x^3=-h}^{(-)} = \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon_{KL} g_I^K g_J^L, & \vartheta^{-1} &= \hat{\vartheta} \Big|_{x^3=h}^{(+)} = \frac{1}{2} \varepsilon^{IJ} \varepsilon_{KL} g_I^K g_J^L. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая (10), из (9) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^- \times \mathbf{r}_2^- &= \sqrt{g^{(-)}} \left(\mathbf{n} - g_I^3 g_J^{\bar{I}} \mathbf{r}^J \right), & \sqrt{g^{(-)}} &= \sqrt{g} \vartheta^{-1}, \\ \mathbf{r}_1^+ \times \mathbf{r}_2^+ &= \sqrt{g^{(+)}} \left(\mathbf{n} - g_I^3 g_J^{\dagger} \mathbf{r}^J \right), & \sqrt{g^{(+)}} &= \sqrt{g} \vartheta^{-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_1^- \times \mathbf{r}_2^-| &= \sqrt{g^{(-)}} \sqrt{1 + g_I^3 g_J^{\bar{I}} g_K^{\bar{J}} g_L^{KL}}, \\ |\mathbf{r}_1^+ \times \mathbf{r}_2^+| &= \sqrt{g^{(+)}} \sqrt{1 + g_I^3 g_J^{\dagger} g_K^{\dagger} g_L^{KL}}. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу (11) и (12) из (8) получаем окончательные выражения для $\overset{(-)}{\mathbf{n}}$, $\overset{(+)}{\mathbf{n}}$:

$$\begin{aligned}\overset{(-)}{\mathbf{n}} &= -\left(\mathbf{n} - g_I^3 g_J^{\bar{I}} \mathbf{r}^J\right) \left(1 + g_I^3 g_J^3 g_K^{\bar{I}} g_L^{\bar{J}} g^{KL}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \overset{(+)}{\mathbf{n}} &= \left(\mathbf{n} - g_I^3 g_J^{\dagger} \mathbf{r}^J\right) \left(1 + g_I^3 g_J^3 g_K^{\dagger} g_L^{\dagger} g^{KL}\right)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (13)$$

Заметим, что подобные формулы были получены в [2].

2. Уравнения микрополярной теории оболочек

Уравнения микрополярной теории оболочек можно получать разными способами, например из общих постулатов механики или трехмерных уравнений. Воспользуемся вторым способом аналогично тому, как это сделано в [2] в случае классической теории, с тем отличием, что в рассматриваемом случае толщина не постоянна и базовая поверхность не совпадает со срединной (см. также [1]).

Как известно [11]–[15], трехмерные уравнения движения микрополярного деформируемого твердого тела, отнесенные к актуальной конфигурации, представляются в виде

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \rho \underline{\mathbf{J}} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2}, \quad (14)$$

а уравнения движения, отнесенные к отсчетной конфигурации, можно записать в форме

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\underline{\mathbf{P}}} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{F} = \overset{\circ}{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \overset{\circ}{\nabla} \cdot \overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\mu}}} + \overset{\circ}{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \overset{\circ}{\underline{\mathbf{P}}} + \overset{\circ}{\rho} \mathbf{m} = \overset{\circ}{\rho} \underline{\mathbf{J}} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2}. \quad (15)$$

Здесь $\underline{\mathbf{P}}$ – тензор напряжений, $\underline{\boldsymbol{\mu}}$ – тензор моментных напряжений, кроме того, $\overset{\circ}{\underline{\mathbf{P}}} = \sqrt{g g^{\circ}}^{-1} \nabla \mathbf{r}^T \cdot \underline{\mathbf{P}}$ и $\overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = \sqrt{g g^{\circ}}^{-1} \nabla \mathbf{r}^T \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}$ – тензоры напряжений и моментных напряжений, отнесенные к отсчетной конфигурации, $\sqrt{g} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3$, $\sqrt{g^{\circ}} = (\overset{\circ}{\mathbf{r}}_1 \times \overset{\circ}{\mathbf{r}}_2) \cdot \overset{\circ}{\mathbf{r}}_3$, $\overset{\circ}{\nabla}$ и ∇ – операторы Гамильтона в отсчетной и актуальной конфигурациях соответственно, ρ – плотность тела, \mathbf{F} – массовая сила, \mathbf{m} – массовый момент, \mathbf{u} – вектор перемещений, $\boldsymbol{\varphi}$ – вектор внутреннего вращения, $\underline{\mathbf{J}}$ – внутренний тензор инерции, $\underline{\mathbf{C}}$ – дискриминантный тензор третьего ранга. Величины, помеченные сверху кружком, относятся к отсчетной конфигурации.

Уравнения (14) и (15) имеют одинаковый вид, поэтому далее, в основном с целью сокращения записи, рассмотрим уравнения актуальной конфигурации (14), а соотношения, получаемые из (15), при необходимости выпишем по аналогии или сообщим способ их получения. Нетрудно заметить, что векторные уравнения (14) при рассматриваемой выше параметризации можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}}^I) + \partial_3 (\hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}}^3) + \hat{\rho} \hat{\mathbf{F}} &= \hat{\rho} \hat{\vartheta} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^I) + \partial_3 (\hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^3) + \hat{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \hat{\vartheta} \hat{\underline{\mathbf{P}}} + \hat{\rho} \hat{\mathbf{m}} &= \hat{\vartheta} \hat{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t^2},\end{aligned}\quad (16)$$

где $\partial_m = \partial/\partial x^m$, а “крышка” над величинами и индексами означает, что они рассмотрены в произвольной точке области тонкого тела, т. е. при произвольном значении поперечной координаты x^3 из ее промежутка изменения.

Интегрируя уравнения (16) от $-h^{(-)}(x^1, x^2)$ до $h^{(+)}(x^1, x^2)$ и учитывая формулу

$$\int_{-h^{(-)}}^{h^{(+)}} \partial_I \mathbf{A}^{\widehat{K}} dx^3 = \partial_I \int_{-h^{(-)}}^{h^{(+)}} \mathbf{A}^{\widehat{K}} dx^3 - \mathbf{A}^{(+)\widehat{K}} \partial_I h^{(+)} - \mathbf{A}^{(-)\widehat{K}} \partial_I h^{(-)}, \quad (17)$$

после простых преобразований найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \mathbf{T}^I) + \mathbf{X}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{a}(x^1, x^2, t), \\ \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \mathbf{N}^I) + \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{T}}}_* + \mathbf{Z}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{c}(x^1, x^2, t), \end{aligned} \quad (18)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^I &= \int_{-h^{(-)}}^{h^{(+)}} \hat{\vartheta} \widehat{\mathbf{P}}^I dx^3, & \mathbf{p}(x^1, x^2, t) &= \int_{-h^{(-)}}^{h^{(+)}} \hat{\rho} \hat{\vartheta} \widehat{\mathbf{F}} dx^3, \\ \mathbf{a}(x^1, x^2, t) &= \int_{-h^{(-)}}^{h^{(+)}} \hat{\rho} \hat{\vartheta} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial t^2} dx^3, \\ \mathbf{X} &= \mathbf{p}(x^1, x^2, t) + \hat{\vartheta} \left(\widehat{\mathbf{P}}^3 - g_{\dagger}^3 g_{\dagger}^{\dagger} \widehat{\mathbf{P}}^{\dagger J} \right) - \hat{\vartheta} \left(\widehat{\mathbf{P}}^3 - g_{\dagger}^3 g_{\dagger}^{\dagger} \widehat{\mathbf{P}}^{\dagger J} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{T}_* = \int_{-h^{(-)}}^{h^{(+)}} \hat{\vartheta} \widehat{\mathbf{P}} dx^3, \quad \mathbf{N}^I = \int_{-h^{(-)}}^{h^{(+)}} \hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^I dx^3,$$

$$\mathbf{r}(x^1, x^2, t) = \int_{-h^{(-)}}^{h^{(+)}} \hat{\rho} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{m}} dx^3, \quad \mathbf{c}(x^1, x^2, t) = \int_{-h^{(-)}}^{h^{(+)}} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{J}} \cdot \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t^2} dx^3,$$

$$\mathbf{Z}(x^1, x^2, t) = \mathbf{r}(x^1, x^2, t) + \hat{\vartheta} \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}^3 - g_{\dagger}^3 g_{\dagger}^{\dagger} \widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\dagger J} \right) - \hat{\vartheta} \left(\widehat{\boldsymbol{\mu}}^3 - g_{\dagger}^3 g_{\dagger}^{\dagger} \widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\dagger J} \right).$$

Умножая обе части первого уравнения из (16) слева векторно на $x^3 \mathbf{n}$ и учитывая равенства $x^3 \mathbf{n} = \mathbf{r}_{\dagger} - \mathbf{r}_I$, $\mathbf{r}_{\hat{p}} \times \hat{\vartheta} \widehat{\mathbf{P}}^{\hat{p}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{T}}}_*$, после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \mathbf{n} \times (\hat{\vartheta} \widehat{\mathbf{P}}^I x^3)) + \mathbf{r}_I \times (\hat{\vartheta} \widehat{\mathbf{P}}^I) \\ - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{T}}}_* + \mathbf{n} \times \partial_3 (\hat{\vartheta} \widehat{\mathbf{P}}^3 x^3) + \mathbf{n} \times (\hat{\rho} \hat{\vartheta} \widehat{\mathbf{F}} x^3) = \mathbf{n} \times \left(\hat{\rho} \hat{\vartheta} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial t^2} x^3 \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Далее, интегрируя уравнение (20) от $-h^{(-)}$ до $h^{(+)}$, в силу формулы (17) получим еще одно искомое векторное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \mathbf{M}^I) + \mathbf{r}_I \times \mathbf{T}^I - \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{T}}_* + \mathbf{Y}(x^1, x^2, t) = \mathbf{b}(x^1, x^2, t), \quad (21)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^I &= \mathbf{n} \times \int_{-h^{(-)}}^{h^{(+)}} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{P}}^I x^3 dx^3, & \mathbf{b} &= \mathbf{n} \times \int_{-h^{(-)}}^{h^{(+)}} \hat{\rho} \hat{\vartheta} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}}{\partial t^2} x^3 dx^3, \\ \mathbf{q} &= \mathbf{n} \times \int_{-h^{(-)}}^{h^{(+)}} \hat{\rho} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{F}} x^3 dx^3, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{q}(x^1, x^2, t) + \mathbf{n} \times \left[\frac{1}{h} \vartheta \left(\mathbf{P}^3 - g_+^3 g_J^I \mathbf{P}^J \right) - \frac{1}{h} \vartheta \left(\mathbf{P}^3 - g_-^3 g_J^I \mathbf{P}^J \right) \right].$$

Нетрудно заметить, что уравнения (18) и (21) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_I^0 \mathbf{T}^I + \mathbf{X}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{a}(x^1, x^2, t), \\ \nabla_I^0 \mathbf{M}^I + \mathbf{r}_I \times \mathbf{T}^I - \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{T}}_* + \mathbf{Y}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{b}(x^1, x^2, t), \\ \nabla_I^0 \mathbf{N}^I + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{T}}_* + \mathbf{Z}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{c}(x^1, x^2, t), \end{aligned} \quad (23)$$

где ∇_I^0 – поверхностный оператор ковариантного дифференцирования.

Уравнения (23) являются искомыми векторными уравнениями микрополярной теории оболочек. Они получены без использования каких-либо гипотез. Отметим, что первые два векторных уравнения представляют уравнения классической теории оболочек.

Вводя в рассмотрение поверхностный набла-оператор Гамильтона $\nabla^0 = \mathbf{r}^I \partial_I$, а также учитывая равенство

$$\mathbf{r}_I \times \mathbf{T}^I + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{T}}_* = \mathbf{r}_I \times (\mathbf{T}^I - \mathbf{T}_*^I) - \mathbf{r}_3 \times \mathbf{T}_*^3,$$

векторные уравнения микрополярной теории оболочек (23) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \nabla^0 \cdot \underline{\mathbf{T}} + \mathbf{X}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{a}(x^1, x^2, t), \\ \nabla^0 \cdot \underline{\mathbf{M}} + \mathbf{r}_I \times (\mathbf{T}^I - \mathbf{T}_*^I) - \mathbf{r}_3 \times \mathbf{T}_*^3 + \mathbf{Y}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{b}(x^1, x^2, t), \\ \nabla^0 \cdot \underline{\mathbf{N}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{T}}_* + \mathbf{Z}(x^1, x^2, t) &= \mathbf{c}(x^1, x^2, t), \end{aligned} \quad (24)$$

где тензор усилий $\underline{\mathbf{T}}$, тензор силовых моментных усилий $\underline{\mathbf{M}}$ и тензор моментных усилий $\underline{\mathbf{N}}$ имеют представления

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}} &= \mathbf{r}_K \mathbf{T}^K = T^{Kl} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_l, \\ \underline{\mathbf{M}} &= \mathbf{r}_K \mathbf{M}^K = M^{KL} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L, & \underline{\mathbf{N}} &= \mathbf{r}_K \mathbf{N}^K = N^{Kl} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_l. \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что $\underline{\mathbf{T}}$ и $\underline{\mathbf{M}}$ – тензоры усилий и силовых моментных усилий, которые совпадают с классическими аналогами, а $\underline{\mathbf{N}}$ – тензор моментных усилий, который определяется посредством тензора моментных напряжений. Заметим также, что $\mathbf{T}^K = T^{Kl}\mathbf{r}_l$, $\mathbf{M}^K = M^{KL}\mathbf{r}_L$ и $\mathbf{N}^K = N^{Kl}\mathbf{r}_l$ называются *контравариантными составляющими* тензоров усилий, силовых моментных усилий и моментных усилий соответственно.

Таким образом, в рассматриваемой микрополярной теории оболочек имеем три основных тензора (они находятся под дифференциальными операторами в уравнениях (24) и участвуют в граничных условиях): тензор усилий $\underline{\mathbf{T}}$, тензор силовых моментных усилий $\underline{\mathbf{M}}$ и тензор моментных усилий $\underline{\mathbf{N}}$. В дальнейшем тензоры $\underline{\mathbf{M}}$ и $\underline{\mathbf{N}}$ будем также называть коротко тензорами моментов микрополярной теории оболочек (см. (25)).

2.1. Уравнения микрополярной теории оболочек в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов

Учитывая

$$\begin{aligned}\nabla_I^0 \mathbf{T}^I &= (\nabla_I^0 T^{IJ} - b_I^J T^{I3})\mathbf{r}_J + (\nabla_I^0 T^{I3} + b_{IJ} T^{IJ})\mathbf{n}, \\ \nabla_I^0 \mathbf{M}^I &= \nabla_I^0 M^{IJ}\mathbf{r}_J + b_{IJ} M^{IJ}\mathbf{n},\end{aligned}\quad (26)$$

а также аналогичную первой формуле в (26) формулу для $\nabla_I^0 \mathbf{N}^I$, уравнения микрополярной теории оболочек (23) или (24) в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментных усилий можно представить в форме

$$\begin{aligned}\nabla_I^0 T^{IJ} - b_I^J T^{I3} + X^J &= a^J, & \nabla_I^0 T^{I3} + b_{IJ} T^{IJ} + X^3 &= a^3, \\ \nabla_I^0 M^{IJ} + C_{.I}^J(T^{I3} - T_*^{I3} + T_*^{3I}) + Y^J &= b^J, \\ b_{IJ} M^{IJ} + C_{IJ}(T^{IJ} - T_*^{IJ}) &= 0, \\ \nabla_I^0 N^{IJ} - b_I^J N^{I3} + C_{.I}^J(T_*^{I3} - T_*^{3I}) + Z^J &= c^J, \\ \nabla_I^0 N^{I3} + b_{IJ} N^{IJ} + C_{IJ} T_*^{IJ} + Z^3 &= c^3,\end{aligned}\quad (27)$$

где

$$\begin{aligned}\nabla_I^0 T^{IJ} &= \partial_I T^{IJ} + T^{KJ}\Gamma_{KI}^I + T^{IK}\Gamma_{KI}^J, \\ \nabla_I^0 T^{I3} &= \partial_I T^{I3} + T^{K3}\Gamma_{KI}^I, & C_{IJ} &= C_{IJ3} = (\mathbf{r}_I \times \mathbf{r}_J) \cdot \mathbf{n},\end{aligned}$$

выражения для $\nabla_I^0 N^{IJ}$ и $\nabla_I^0 M^{IJ}$ аналогичны выражению для $\nabla_I^0 T^{IJ}$, а $\nabla_I^0 M^{I3}$ имеет такое же выражение, что и $\nabla_I^0 T^{I3}$, Γ_{KL}^I – поверхностные символы Кристоффеля второго рода.

В системе (27) девять уравнений, среди которых существует одно недифференциальное уравнение. Нетрудно доказать, что шестое недифференциальное уравнение из (27) является тождеством. Таким образом, в рассматриваемой микрополярной теории оболочек в общем случае имеем восемь уравнений в кон-

травариантных компонентах тензоров усилий и моментов. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
\nabla_I^0 T^{IJ} - b_I^J T^{I3} + X^J &= a^J, & \nabla_I^0 T^{I3} + b_{IJ} T^{IJ} + X^3 &= a^3, \\
\nabla_I^0 M^{IJ} + C_{.I}^J (T^{I3} - T_*^{I3} + T_*^{3I}) + Y^J &= b^J, \\
\nabla_I^0 N^{IJ} - b_I^J N^{I3} + C_{.I}^J (T_*^{I3} - T_*^{3I}) + Z^J &= c^J, \\
\nabla_I^0 N^{I3} + b_{IJ} N^{IJ} + C_{IJ} T_*^{IJ} + Z^3 &= c^3.
\end{aligned} \tag{28}$$

2.2. Уравнения микрополярной теории оболочек класса TS в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов

В случае оболочек класса TS принимаются следующие основные допущения [2]:

$$1 - k_1 x^3 \approx 1, \quad 1 - k_2 x^3 \approx 1, \quad \hat{\vartheta} \approx 1, \quad \hat{g}_J^I \approx g_J^I, \tag{29}$$

в силу которых $\underline{\mathbf{T}}^I = \underline{\mathbf{T}}_*^I$, а формулы (19) и (22) получают соответствующий вид (для краткости выписывать их не будем). Учитывая изложенное выше, из (28) получим следующие уравнения для микрополярной теории оболочек класса TS в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов:

$$\begin{aligned}
\nabla_I^0 T^{IJ} - b_I^J T^{I3} + X^J &= a^J, & \nabla_I^0 T^{I3} + b_{IJ} T^{IJ} + X^3 &= a^3, \\
\nabla_I^0 M^{IJ} + C_{.I}^J T_*^{3I} + Y^J &= b^J, \\
\nabla_I^0 N^{IJ} - b_I^J N^{I3} + C_{.I}^J (T^{I3} - T_*^{3I}) + Z^J &= c^J, \\
\nabla_I^0 N^{I3} + b_{IJ} N^{IJ} + C_{IJ} T^{IJ} + Z^3 &= c^3.
\end{aligned} \tag{30}$$

2.3. Уравнения микрополярной теории призматических оболочек в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов

В этом случае в качестве базовой поверхности можно рассматривать плоскость, т. е. $b_{IJ} = 0$, следовательно, условия (29) в точности выполняются. Поэтому из (30) будем иметь следующие уравнения микрополярной теории призматических оболочек в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов:

$$\begin{aligned}
\nabla_I^0 T^{IJ} + X^J &= a^J, & \nabla_I^0 T^{I3} + X^3 &= a^3, & \nabla_I^0 M^{IJ} + C_{.I}^J T_*^{3I} + Y^J &= b^J, \\
\nabla_I^0 N^{IJ} + C_{.I}^J (T^{I3} - T_*^{3I}) + Z^J &= c^J, & \nabla_I^0 N^{I3} + C_{IJ} T^{IJ} + Z^3 &= c^3.
\end{aligned} \tag{31}$$

Из уравнений (31) получаются соответствующие уравнения для отсчетной конфигурации, если входящие в них величины помечать сверху кружком так, как это сделано в (15). В этой связи с целью сокращения текста выписывать их не будем. Однако следует отметить, что выбор типа параметризации (классической, новой, при произвольной базовой поверхности и др.) области тонкого тела не зависит от выбора исходной конфигурации. Другими словами, если в качестве исходной выбрана отсчетная конфигурация, то параметризацию (из перечисленных выше) области тонкого тела можно выбрать произвольно, а параметризация актуальной конфигурации уже определяется деформацией тела, и наоборот, если в качестве исходной выбрана актуальная конфигурация, то

параметризацию области тонкого тела можно выбрать произвольно, а параметризация отсчетной конфигурации определяется деформацией тела [16], [17].

Отметим также, что \mathbf{X} и \mathbf{Y} в уравнениях (24) выражаются через неизвестные \mathbf{P}^m и \mathbf{P}^n , а \mathbf{Z} – через неизвестные $\underline{\boldsymbol{\mu}}^m$ и $\underline{\boldsymbol{\mu}}^n$ (см. соответствующие формулы (19) и (22)). Для их нахождения аналогично классическому случаю [2], [18] воспользуемся граничными условиями физического содержания

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{P}} &= \mathbf{P}(x^1, x^2, t), & \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{P}} &= \mathbf{P}(x^1, x^2, t), \\ \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} &= \boldsymbol{\mu}(x^1, x^2, t), & \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} &= \boldsymbol{\mu}(x^1, x^2, t), \end{aligned} \quad (32)$$

где $\mathbf{P}(x^1, x^2, t)$ и $\mathbf{P}(x^1, x^2, t)$ – заданные векторы напряжения внешних сил, а $\boldsymbol{\mu}(x^1, x^2, t)$ и $\boldsymbol{\mu}(x^1, x^2, t)$ – заданные векторы моментного напряжения внешних моментов на внутренней S^- и внешней S^+ поверхностях соответственно. В силу (13) из (32) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^3 - g_I^3 g_J^{\bar{I}} \mathbf{P}^J &= -\sqrt{1 + g_I^3 g_J^3 g_K^{\bar{I}} g_L^{\bar{J}} g^{KL}} \mathbf{P}, \\ \mathbf{P}^3 - g_I^3 g_J^{\dagger(+)} \mathbf{P}^J &= \sqrt{1 + g_I^3 g_J^3 g_K^{\dagger} g_L^{\dagger} g^{KL}} \mathbf{P}, \\ \boldsymbol{\mu}^3 - g_I^3 g_J^{\bar{I}} \boldsymbol{\mu}^J &= -\sqrt{1 + g_I^3 g_J^3 g_K^{\bar{I}} g_L^{\bar{J}} g^{KL}} \boldsymbol{\mu}, \\ \boldsymbol{\mu}^3 - g_I^3 g_J^{\dagger(+)} \boldsymbol{\mu}^J &= \sqrt{1 + g_I^3 g_J^3 g_K^{\dagger} g_L^{\dagger} g^{KL}} \boldsymbol{\mu}. \end{aligned} \quad (33)$$

Учитывая (33), из соответствующих соотношений (19) и (22) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{p}(x^1, x^2, t) + \bar{C}(x^1, x^2, t) \mathbf{P}(x^1, x^2, t) + C(x^1, x^2, t) \mathbf{P}(x^1, x^2, t), \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{q}(x^1, x^2, t) + \bar{C}(x^1, x^2, t) h \underline{\mathbf{n}} \times \mathbf{P}(x^1, x^2, t) + C(x^1, x^2, t) h \underline{\mathbf{n}} \times \mathbf{P}, \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{r}(x^1, x^2, t) + \bar{C}(x^1, x^2, t) \boldsymbol{\mu}(x^1, x^2, t) + C(x^1, x^2, t) \boldsymbol{\mu}(x^1, x^2, t). \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\bar{C}(x^1, x^2, t) = \bar{\vartheta} \sqrt{1 + g_I^3 g_J^3 g_K^{\bar{I}} g_L^{\bar{J}} g^{KL}}, \quad C(x^1, x^2, t) = \vartheta \sqrt{1 + g_I^3 g_J^3 g_K^{\dagger} g_L^{\dagger} g^{KL}}.$$

Уравнения (24), в которых \mathbf{X} и \mathbf{Y} определяются с помощью (34), представляют собой уравнения микрополярной теории оболочек в актуальной конфигурации с учетом заданных объемных нагрузок и нагрузок на лицевых поверхностях. Аналогично приведенным выше уравнениям можно получить и уравнения в отсчетной конфигурации.

3. Вектор усилия (усилие) и векторы моментных усилий. О граничных условиях микрополярной теории оболочек

Основная гипотеза теории оболочек заключается в том, что вместо точечного нахождения непрерывных полей векторов напряжения и моментного напряжения в оболочке на поперечных площадках определяют их главные векторы (непрерывных полей векторов напряжения и моментного напряжения) и главный момент поля вектора напряжения. Таким образом, предполагается, что оболочка представляет собой в достаточной мере жесткую механическую систему, поэтому если на всякой поперечной площадке систему действующих на нее непрерывно распределенных сил и моментов заменить статически эквивалентной силой и парой (момент этой пары – сумма главного момента распределенных сил и результирующего момента распределенных моментов), то этим существенно не исказится картина напряженно-деформированного состояния оболочки.

Пусть $\hat{\mathbf{l}}$ – орт тангенциальной нормали дуги $d\hat{s}$ координатной поверхности \hat{S} : $x^3 = \text{const}$. Обозначим через Σ_l линейчатую поверхность, образованную нормальными к S (базовой поверхности), проходящими через $d\hat{s}$. Соответствующую $d\hat{s}$ на базовой поверхности S дугу обозначим ds , а орт тангенциальной нормали к ней – через \mathbf{l} . Тогда имеем

$$\begin{aligned} d\hat{\Sigma}_l \hat{\mathbf{l}} &= d\hat{\Sigma}_l = \sqrt{\hat{g}} \varepsilon_{IJ} \mathbf{r}^I dx^J dx^3, & d\Sigma_l \mathbf{l} &= d\Sigma_l = \sqrt{g} \varepsilon_{IJ} \mathbf{r}^I dx^J dx^3, \\ d\hat{\Sigma}_l &= |d\hat{\Sigma}_l| = |d\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{n}| dx^3 = d\hat{s} dx^3, & d\Sigma_l &= ds dx^3. \end{aligned} \quad (35)$$

Умножая обе части первого равенства в (35) скалярно на $\mathbf{r}_{\hat{K}}$, а второго равенства на \mathbf{r}_K , получим

$$d\hat{\Sigma}_l \hat{l}_I = \sqrt{\hat{g}} \varepsilon_{IJ} dx^J dx^3, \quad d\Sigma_l l_I = \sqrt{g} \varepsilon_{IJ} dx^J dx^3. \quad (36)$$

На основании формул (35) и (36) находим

$$\frac{d\hat{\Sigma}_l \hat{l}_I}{d\Sigma_l l_I} = \frac{d\hat{s} \hat{l}_I}{ds l_I} = \sqrt{\hat{g} g^{-1}} = \hat{\vartheta} = (1 - k_1 x^3)(1 - k_2 x^3). \quad (37)$$

Пусть $\hat{\mathbf{P}}_{(l)}$ и $\hat{\mathbf{N}}_{(l)}$ – векторы напряжения и моментного напряжения, действующие на площадку $d\hat{\Sigma}_l = d\hat{s} dx^3$ с нормалью $\hat{\mathbf{l}}$ в некоторой точке $(x^1, x^2, x^3) \in d\hat{\Sigma}_l$. Тогда имеем формулы

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_{(l)} &= \hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{P}} = \hat{l}_I \hat{\mathbf{P}}^I, & \mathbf{P}_{(l)} &= \mathbf{l} \cdot \mathbf{P} = l_I \mathbf{P}^I, \\ \hat{\mathbf{N}}_{(l)} &= \hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \hat{l}_I \hat{\mathbf{N}}^I, & \mathbf{N}_{(l)} &= \mathbf{l} \cdot \mathbf{N} = l_I \mathbf{N}^I, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{\mathbf{N}}$ – тензоры напряжений и моментных напряжений в точке (x^1, x^2, x^3) , а $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}|_{x^3=0}$ и $\mathbf{N} = \hat{\mathbf{N}}|_{x^3=0}$.

Введем в рассмотрение главный вектор (усилие) и главный момент распределенных сил напряжений, а также главный момент распределенных пар, дей-

ствующих на Σ_l :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{(l)} ds &= \int_{-h}^{(+h)} \widehat{\mathbf{P}}_{(\hat{i})} d\hat{s} dx^3 = \int_{-h}^{(+h)} \widehat{\mathbf{P}}_{(\hat{i})} d\widehat{\Sigma}_{\hat{i}}, \\
 \mathbf{M}_{(l)} ds &= \mathbf{n} \times \int_{-h}^{(+h)} \widehat{\mathbf{P}}_{(\hat{i})} x^3 d\hat{s} dx^3 = \mathbf{n} \times \int_{-h}^{(+h)} \widehat{\mathbf{P}}_{(\hat{i})} x^3 d\widehat{\Sigma}_{\hat{i}}, \\
 \mathbf{N}_{(l)} ds &= \int_{-h}^{(+h)} \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{(\hat{i})} d\hat{s} dx^3 = \int_{-h}^{(+h)} \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{(\hat{i})} d\widehat{\Sigma}_{\hat{i}}.
 \end{aligned} \tag{39}$$

В силу (19) и (22), а также с учетом (37) и (38) из соотношений (39) находим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{(l)} ds &= \int_{-h}^{(+h)} \hat{l}_{\hat{I}} \widehat{\mathbf{P}}^{\hat{I}} d\hat{s} dx^3 = \int_{-h}^{(+h)} \hat{\nu} l_{\hat{I}} \widehat{\mathbf{P}}^{\hat{I}} ds dx^3 \\
 &= ds l_{\hat{I}} \int_{-h}^{(+h)} \hat{\nu} \widehat{\mathbf{P}}^{\hat{I}} dx^3 = ds l_{\hat{I}} \mathbf{T}^{\hat{I}} = ds \mathbf{l} \cdot \mathbf{T}, \\
 \mathbf{M}_{(l)} ds &= \mathbf{n} \times \int_{-h}^{(+h)} \hat{l}_{\hat{I}} \widehat{\mathbf{P}}^{\hat{I}} x^3 d\hat{s} dx^3 \\
 &= \mathbf{n} \times \int_{-h}^{(+h)} \hat{\nu} l_{\hat{I}} \widehat{\mathbf{P}}^{\hat{I}} x^3 ds dx^3 = l_{\hat{I}} \mathbf{M}^{\hat{I}} ds = ds \mathbf{l} \cdot \mathbf{M}, \\
 \mathbf{N}_{(l)} ds &= \int_{-h}^{(+h)} \hat{l}_{\hat{I}} \widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\hat{I}} d\hat{s} dx^3 = \int_{-h}^{(+h)} \hat{\nu} l_{\hat{I}} \widehat{\boldsymbol{\mu}}^{\hat{I}} ds dx^3 = ds l_{\hat{I}} \mathbf{N}^{\hat{I}} = ds \mathbf{l} \cdot \mathbf{N}.
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем аналогичные (38) формулы

$$\mathbf{T}_{(l)} = \mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{T}} = l_{\hat{I}} \mathbf{T}^{\hat{I}}, \quad \mathbf{M}_{(l)} = \mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{M}} = l_{\hat{I}} \mathbf{M}^{\hat{I}}, \quad \mathbf{N}_{(l)} = \mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{N}} = l_{\hat{I}} \mathbf{N}^{\hat{I}}. \tag{40}$$

Векторы $\mathbf{T}_{(l)}$, $\mathbf{M}_{(l)}$ и $\mathbf{N}_{(l)}$ коротко назовем *векторами усилия, силового моментного усилия и моментного усилия*, а тензоры $\underline{\mathbf{T}}$, $\underline{\mathbf{M}}$ и $\underline{\mathbf{N}}$ – *тензорами усилий, силовых моментных усилий и моментных усилий* соответственно. Легко видеть, что компоненты тензоров усилий, силовых моментных усилий и моментных усилий имеют вид

$$\begin{aligned}
 T^{Ik} &= \int_{-h}^h \hat{\nu} \hat{g}_{\hat{J}}^{\hat{I}} \widehat{P}^{\hat{I}k} dx^3, & M^{IL} &= \int_{-h}^h \hat{\nu} \hat{g}_{\hat{J}}^{\hat{I}} C_{\hat{K}}^{\cdot L} \widehat{P}^{\hat{J}K} x^3 dx^3, \\
 N^{Ik} &= \int_{-h}^h \hat{\nu} \hat{g}_{\hat{J}}^{\hat{I}} \widehat{\mu}^{\hat{I}k} dx^3.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Из (41) видим, что тензор усилий и тензор моментных усилий имеют шесть компонент, а тензор силовых моментных усилий – четыре.

Учитывая, что в линиях кривизны выполнены соотношения

$$\begin{aligned}\hat{\vartheta} &= (1 - k_1 x^3)(1 - k_2 x^3), & g_\alpha^\beta &= 0, & \alpha \neq \beta, \\ g_1^{\hat{1}} &= (1 - k_1 x^3)^{-1}, & g_1^{\hat{2}} &= (1 - k_2 x^3)^{-1},\end{aligned}$$

контравариантные составляющие тензоров усилий, силовых моментных усилий и моментных усилий в линиях кривизны представляются в форме¹

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^\alpha &= T^{\alpha k} \mathbf{r}_k = \int_{-h}^h [g_\alpha^\alpha - (k_2 g_1^\alpha + k_1 g_2^\alpha) x^3] \hat{\mathbf{P}}^\alpha dx^3, \\ \mathbf{M}^\alpha &= M^{\alpha J} \mathbf{r}_J = \int_{-h}^h [g_\alpha^\alpha - (k_2 g_1^\alpha + k_1 g_2^\alpha) x^3] C_K^{\cdot L} \hat{\mathbf{P}}^{\alpha K} x^3 dx^3 \mathbf{r}_L, \\ \mathbf{N}^\alpha &= N^{\alpha k} \mathbf{r}_k = \int_{-h}^h [g_\alpha^\alpha - (k_2 g_1^\alpha + k_1 g_2^\alpha) x^3] \hat{\boldsymbol{\mu}}^\alpha dx^3, \quad \langle \alpha = 1, 2 \rangle.\end{aligned}$$

Вектор усилия (усилие) $\mathbf{T}_{(l)}$ и векторы силового моментного усилия $\mathbf{M}_{(l)}$ и моментного усилия $\mathbf{N}_{(l)}$ (моменты) представляют собой векторы, рассчитанные на единицу длины. Пусть \mathbf{s} – орт касательной дуги ds . Предположим, что орты \mathbf{l} , \mathbf{s} , \mathbf{n} составляют триэдр правой ориентации, т. е. $\mathbf{n} \times \mathbf{l} = \mathbf{s}$, $\mathbf{l} \times \mathbf{s} = \mathbf{n}$, $\mathbf{s} \times \mathbf{n} = \mathbf{l}$. Тогда усилие $\mathbf{T}_{(l)}$ и моменты $\mathbf{M}_{(l)}$ и $\mathbf{N}_{(l)}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{(l)} &= T_{(ll)} \mathbf{l} + T_{(ls)} \mathbf{s} + T_{(ln)} \mathbf{n}, & \mathbf{M}_{(l)} &= M_{(ll)} \mathbf{l} + M_{(ls)} \mathbf{s}, \\ \mathbf{N}_{(l)} &= N_{(ll)} \mathbf{l} + N_{(ls)} \mathbf{s} + N_{(ln)} \mathbf{n}.\end{aligned}\tag{42}$$

Из (42) видно, что усилие $\mathbf{T}_{(l)}$ имеет три компоненты: $T_{(ll)}$ – нормальное усилие, $T_{(ls)}$ – касательное усилие и $T_{(ln)}$ – поперечное касательное усилие, которое также называется *перерезывающей силой*. Силовой момент $\mathbf{M}_{(l)}$ имеет две компоненты: $M_{(ll)}$ – силовой крутящий момент, $M_{(ls)}$ – силовой изгибающий момент. Момент $\mathbf{N}_{(l)}$ имеет три компоненты: $N_{(ll)}$ – крутящий момент, $N_{(ls)}$ – изгибающий момент, $N_{(ln)}$ – поперечный крутящий момент.

Таким образом, система сил напряжений и система пар (моментов), непрерывно распределенные на поперечной площадке Σ_l с нормалью \mathbf{l} (\mathbf{l} – тангенциальная нормаль к дуге ds базовой поверхности), статически эквивалентны совокупности усилия $\mathbf{T}_{(l)}$ и моментов $\mathbf{M}_{(l)}$ и $\mathbf{N}_{(l)}$. При построениях теории оболочек принимают допущение, что задание совокупности усилия $\mathbf{T}_{(l)}$ и моментов $\mathbf{M}_{(l)}$ и $\mathbf{N}_{(l)}$ на каждой поперечной площадке Σ_l , как уже отмечалось выше, с вполне достаточной точностью дает картину распределения сил напряжений и пар (моментов) в оболочке. Поэтому основной задачей теории оболочек считается определение усилий сил напряжений, моментов сил напряжений и пар, действующих на поперечных площадках. Эти величины имеют важный механический смысл. Если мы нагружаем боковые поверхности оболочки поверхностными силами и парами (моментами), то мы прилагаем к отдельным участкам поверхности статически эквивалентные им суммарные силы и моменты (главные векторы) – усилия и моменты. Поэтому вместо непрерывного распределения напряжений

¹Запись $\langle \alpha = 1, 2 \rangle$ означает, что нет суммирования по α .

и пар найдем соответствующие им усилия и моменты. Другими словами, в рассматриваемой микрополярной теории оболочек в каждой фиксированной точке (x^1, x^2) базовой поверхности S и для всякого касательного орта \mathbf{l} в этой точке определим восемь величин: $T_{(ll)}$ – нормальное усилие, $T_{(ls)}$ – касательное усилие и $T_{(ln)}$ – поперечное касательное усилие (перерезывающую силу), $M_{(ll)}$ – силовой крутящий момент, $M_{(ls)}$ – силовой изгибающий момент, $N_{(ll)}$ – крутящий момент, $N_{(ls)}$ – изгибающий момент, $N_{(ln)}$ – поперечный крутящий момент. Следовательно, граничные условия на контуре Γ базовой поверхности S в силу формул (42) представляются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{T}_{(l)} = T_{(ll)}\mathbf{l} + T_{(ls)}\mathbf{s} + T_{(ln)}\mathbf{n} = \mathbf{f}, \\ \mathbf{l} \cdot \mathbf{M} &= \mathbf{M}_{(l)} = M_{(ll)}\mathbf{l} + M_{(ls)}\mathbf{s} = \mathbf{g}, \\ \mathbf{l} \cdot \mathbf{N} &= \mathbf{N}_{(l)} = N_{(ll)}\mathbf{l} + N_{(ls)}\mathbf{s} + N_{(ln)}\mathbf{n} = \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (43)$$

где \mathbf{l} – тангенциальная нормаль к контуру Γ базовой поверхности S , а \mathbf{f} , \mathbf{g} и \mathbf{h} выражаются через заданные на контуре Γ функции.

Согласно изложенному выше по уравнениям рассматриваемой микрополярной теории оболочек (пластин) можно определить не более восьми неизвестных функций, так как в общем случае имеем восемь независимых уравнений относительно контравариантных компонент тензоров усилий и моментов (см. уравнения (28)–(31)) и восемь граничных условий (43). Для замыкания, например, системы уравнений (28) с граничными условиями (43) следует конкретизировать среду и рассматривать соответствующие определяющие соотношения, содержащие не более восьми неизвестных функций. Другими словами, для математически корректной постановки краевых задач в микрополярной теории оболочек (пластин) число неизвестных функций не должно быть больше восьми (максимальное число неизвестных функций зависит от числа уравнений относительно контравариантных компонент тензоров усилий и моментов). Следовательно, для решения этой проблемы аналогично классическому случаю можно сформулировать подходящие кинематические или статические гипотезы (или и те, и другие [11], [13], [19]–[24]) таким образом, чтобы число неизвестных функций в определяющих соотношениях не превосходило восьми. Хотя, используя метод классических ортогональных полиномов (или какой-нибудь аналитический метод), можно обойтись без гипотез и построить такие теории тонких тел (а не оболочек), в которых число уравнений и, следовательно, число неизвестных функций могут быть значительно больше восьми (см. [25]–[28] и др.), что вполне естественно при нынешнем развитии вычислительной техники.

4. Уравнения расширенной микрополярной теории оболочек

Уравнения микрополярной теории оболочек (23) и (28) были получены без учета моментов второго порядка. Здесь получим уравнения микрополярной теории оболочек с учетом этих моментов. С этой целью, умножая обе части второго уравнения (16) слева векторно на $x^3\mathbf{n}$ и учитывая равенства

$$x^3\mathbf{n} = \mathbf{r}_{\hat{j}} - \mathbf{r}_I, \quad \mathbf{r}_{\hat{p}} \times \hat{\vartheta}\hat{\boldsymbol{\mu}}^{\hat{p}} = \hat{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \hat{\vartheta}\hat{\boldsymbol{\mu}}, \quad \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}^{I3} - \hat{P}^{3I})\mathbf{r}_I,$$

после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \mathbf{n} \times (\hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^I x^3)) + \mathbf{r}_I \times (\hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^I) - \hat{\mathbf{C}} \otimes^2 \hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{n} \times \partial_3 (\hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^3 x^3) \\ + x^3 \hat{\vartheta} (\hat{P}^{I3} - \hat{P}^{3I}) \mathbf{r}_I + \mathbf{n} \times (\hat{\rho} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{m}} x^3) = \mathbf{n} \times \left(\hat{\vartheta} \hat{\mathbf{J}} \cdot \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial t^2} x^3 \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Далее, интегрируя уравнение (44) от $-\frac{h}{h}$ до $\frac{h}{h}$, в силу формулы (17) найдем

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_I (\sqrt{g} \mathbf{R}^I) + \mathbf{r}_I \times \mathbf{N}^I - \hat{\mathbf{C}} \otimes^2 \hat{\mathbf{N}}_* + (M_*^{I3} - M_*^{3I}) \mathbf{r}_I + \mathbf{H}(x^1, x^2, t) = \mathbf{d}, \quad (45)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^I &= \mathbf{n} \times \int_{-\frac{h}{h}}^{\frac{h}{h}} \hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^I x^3 dx^3, \quad \hat{\mathbf{N}}_* = \int_{-\frac{h}{h}}^{\frac{h}{h}} \hat{\vartheta} \hat{\boldsymbol{\mu}}^{I3} x^3 dx^3, \quad M_*^{I3} = \int_{-\frac{h}{h}}^{\frac{h}{h}} \hat{\vartheta} \hat{P}^{I3} x^3 dx^3, \\ M_*^{3I} &= \int_{-\frac{h}{h}}^{\frac{h}{h}} \hat{\vartheta} \hat{P}^{3I} x^3 dx^3, \quad \mathbf{d}(x^1, x^2, t) = \mathbf{n} \times \int_{-\frac{h}{h}}^{\frac{h}{h}} \left(\hat{\vartheta} \hat{\mathbf{J}} \cdot \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial t^2} x^3 \right) dx^3, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{n} \times \left[\hat{h} \vartheta \left(\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(+3)} - g_+^3 g_J^{\dagger(+)} \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(+)} \right) - \hat{h} \vartheta \left(\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(-3)} - g_-^3 g_J^{\bar{(-)}} \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(-)} \right) + \int_{-\frac{h}{h}}^{\frac{h}{h}} \hat{\rho} \hat{\vartheta} \hat{\mathbf{m}} x^3 dx^3 \right]. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (45) можно записать в виде

$$\nabla_I^0 \mathbf{R}^I + \mathbf{r}_I \times \mathbf{N}^I - \hat{\mathbf{C}} \otimes^2 \hat{\mathbf{N}}_* + (M_*^{I3} - M_*^{3I}) \mathbf{r}_I + \mathbf{H}(x^1, x^2, t) = \mathbf{d}(x^1, x^2, t). \quad (46)$$

Учитывая

$$\mathbf{r}_I \times \mathbf{N}^I - \hat{\mathbf{C}} \otimes^2 \hat{\mathbf{N}}_* = \mathbf{r}_I \times (\mathbf{N}^I - \mathbf{N}_*^I) - \mathbf{r}_3 \times \mathbf{N}_*^3,$$

уравнение (46) можно представить в форме

$$\nabla^0 \cdot \hat{\mathbf{R}} + \mathbf{r}_I \times (\mathbf{N}^I - \mathbf{N}_*^I) - \mathbf{r}_3 \times \mathbf{N}_*^3 + (M_*^{I3} - M_*^{3I}) \mathbf{r}_I + \mathbf{H}(x^1, x^2, t) = \mathbf{d}(x^1, x^2, t), \quad (47)$$

где $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{r}_K \mathbf{R}^K = R^{KL} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L$ – тензор моментов второго порядка.

Уравнения (24) вместе с уравнением (47) составляют векторные уравнения расширенной микрополярной теории оболочек.

Заметим, что в расширенной микрополярной теории оболочек аналогично второй формуле (39) надо вводить в рассмотрение момент (моментное усилие) второго порядка $\mathbf{R}_{(l)}$, определяемый формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{(l)} ds = \mathbf{n} \times \int_{-\frac{h}{h}}^{\frac{h}{h}} \hat{l}_I \hat{\boldsymbol{\mu}}^I x^3 ds dx^3 = \mathbf{n} \times \int_{-\frac{h}{h}}^{\frac{h}{h}} \hat{\vartheta} l_I \hat{\boldsymbol{\mu}}^I x^3 ds dx^3 = l_I \mathbf{R}^I ds = ds \mathbf{l} \cdot \hat{\mathbf{R}}, \\ \mathbf{R}_{(l)} = \mathbf{l} \cdot \hat{\mathbf{R}}, \end{aligned}$$

который рассчитан на единицу длины. Тогда, естественно, к граничным условиям (43) надо добавить следующее граничное условие:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R}_{(l)} = R_{(ll)}\mathbf{l} + R_{(ls)}\mathbf{s} = \mathbf{t}, \quad (48)$$

где $R_{(ll)}$ – крутящий момент второго порядка, $R_{(ls)}$ – изгибающий момент второго порядка, а \mathbf{t} определяется с помощью заданной функции.

Итак, в расширенной микрополярной теории оболочек имеем четыре основных тензора (они находятся под дифференциальными операторами в уравнениях и участвуют в граничных условиях): тензор усилий $\underline{\mathbf{T}}$, тензор силовых моментных усилий $\underline{\mathbf{M}}$, тензор моментных усилий $\underline{\mathbf{N}}$ и тензор моментных усилий второго порядка $\underline{\mathbf{R}}$. В дальнейшем тензоры $\underline{\mathbf{M}}$, $\underline{\mathbf{N}}$ и $\underline{\mathbf{R}}$ будем называть коротко тензорами моментов расширенной микрополярной теории оболочек.

Видно, что вектор \mathbf{H} в (47) аналогично (34) можно представить в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \hat{\rho} \hat{\theta} \hat{\mathbf{m}} x^3 dx^3 + \overset{(-)}{C}(x^1, x^2, t) \overset{(-)}{h} \mathbf{n} \times \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}} + \overset{(+)}{C}(x^1, x^2, t) \overset{(+)}{h} \mathbf{n} \times \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}.$$

Легко усмотреть, что (47) в компонентах можно представить в форме

$$\begin{aligned} \nabla_I^0 R^{IJ} + C_{\cdot I}^J(N^{I3} - N_*^{I3} + N_*^{3I}) + M_*^{I3} - M_*^{3I} + H^J &= d^J, \\ b_{IJ}R^{IJ} + C_{IJ}(N^{IJ} - N_*^{IJ}) &= 0, \end{aligned} \quad (49)$$

где последнее недифференциальное уравнение аналогично шестому недифференциальному уравнению в (27) является тождеством.

4.1. Уравнения расширенной микрополярной теории оболочек в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов

Если к системе уравнений (28) добавить первое соотношение из (49), то получим искомые уравнения в виде

$$\begin{aligned} \nabla_I^0 T^{IJ} - b_I^J T^{I3} + X^J &= a^J, \quad \nabla_I^0 T^{I3} + b_{IJ} T^{IJ} + X^3 = a^3, \\ \nabla_I^0 M^{IJ} + C_{\cdot I}^J(T^{I3} - T_*^{I3} + T_*^{3I}) + Y^J &= b^J, \\ \nabla_I^0 N^{IJ} - b_I^J N^{I3} + C_{\cdot I}^J(T_*^{I3} - T_*^{3I}) + Z^J &= c^J, \\ \nabla_I^0 N^{I3} + b_{IJ} N^{IJ} + C_{IJ} T_*^{IJ} + Z^3 &= c^3, \\ \nabla_I^0 R^{IJ} + C_{\cdot I}^J(N^{I3} - N_*^{I3} + N_*^{3I}) + M_*^{I3} - M_*^{3I} + H^J &= d^J. \end{aligned} \quad (50)$$

На основании (50) аналогично (30) и (31) при необходимости легко получить уравнения расширенных микрополярных теорий оболочек класса TS и призматических оболочек. Поэтому с целью сокращения текста выписывать их не будем. Из (50) видно, что в расширенной микрополярной теории оболочек (пластин) в общем случае имеем 10 уравнений в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов и 10 граничных условий (см. (43) и (48)). Поэтому в этой теории оболочек (пластин) в общем случае можно определить не более десяти неизвестных функций. Следовательно, для замыкания системы

уравнений (50) с граничными условиями (43) и (48) следует конкретизировать среду и рассматривать соответствующие определяющие соотношения, содержащие не более десяти неизвестных функций. Другими словами, для математически корректной постановки краевых задач в расширенной микрополярной теории оболочек (пластин) число неизвестных функций не должно быть больше десяти (максимальное число неизвестных функций зависит от числа уравнений относительно контравариантных компонент тензоров усилий и моментов). С целью решения этой проблемы, как было изложено выше в случае микрополярной теории оболочек (пластин), аналогично классическому случаю можно сформулировать подходящие кинематические или статические гипотезы, или и те и другие так, чтобы число неизвестных функций не было больше десяти. Однако, как было изложено выше, используя метод классических ортогональных полиномов (или какой-нибудь аналитический метод), можно построить такие теории тонких тел (а не оболочек), в которых число систем уравнений и, следовательно, число неизвестных функций могут быть значительно больше десяти, что вполне допустимо при нынешнем развитии вычислительной техники.

Список литературы

1. ВЕКУА И. Н. *Основы тензорного анализа и теории ковариантов*. Наука, М., 1978.
2. ВЕКУА И. Н. *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек*. Наука, М., 1982.
3. ЛУРЬЕ А. И. *Нелинейная теория упругости*. Наука, М., 1980.
4. НИКАБАДЗЕ М. У., УЛУХАНЫАН А. Р. *Постановки задач для тонкого деформируемого трехмерного тела*. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, **5** (2005), 43–49; англ. пер.: НИКАБАДЗЕ М. У., УЛУХАНЫАН А. Р. *Formulations of problems for a deformable thin three-dimensional body*. Moscow Univ. Mech. Bull., **60**:5 (2005), 5–11.
5. ДИМИТРИЕНКО Ю. И. *Тензорное исчисление*. Высш. шк., М., 2001.
6. ДИМИТРИЕНКО Ю. И. *Механика сплошной среды*. В 4-х томах. Т. 1: *Тензорный анализ*. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, М., 2011.
7. ПОВЕДРЯ Б. Е. *Лекции по тензорному анализу*. Изд-во МГУ, М., 1986.
8. НИКАБАДЗЕ М. У. *О некоторых вопросах тензорного исчисления*. I, *Соврем. математика и ее прилож.*, **62** (2009), 67–95; англ. пер.: НИКАБАДЗЕ М. У. *On some problems of tensor calculus*. I. *J. Math. Sci.*, **161**:5 (2009), 668–697.
9. НИКАБАДЗЕ М. У. *О некоторых вопросах тензорного исчисления*. II, *Соврем. математика и ее прилож.*, **62** (2009), 96–130; НИКАБАДЗЕ М. У. *On some problems of tensor calculus*. II. *J. Math. Sci.*, **161**:5 (2009), 698–733.
10. НИКАБАДЗЕ М. У. *Некоторые вопросы тензорного исчисления с приложениями к механике*. Деп. в ВИНТИ РАН 05.08.13, №231-В2013, 242 с.
11. АМБАРЦУМЯН С. А. *Микрополярная теория оболочек и пластин*. Изд-во НАН Армении, Ереван, 1999.
12. COSSERAT E., COSSERAT F. *Theorie des Corp Deformables*. Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris, 1909.
13. ERINGEN A. C. *Microcontinuum Field Theories*. 1. *Foundation and solids*. Springer-Verlag, New York, 1999.

14. НОВАЦКИЙ В. *Теория упругости*. Мир, М., 1975.
15. КУПРАДЗЕ В. Д., ГЕГЕЛИА Т. Г., БАШЕЛЕЙШВИЛИ М. О., БУРЧУЛАДЗЕ Т. В. *Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости*. Наука, М., 1976.
16. НИКАБАДЗЕ М. У. *Некоторые геометрические соотношения теории оболочек с двумя базовыми поверхностями*. Изв. РАН. МТТ, 2000, № 4, 129–139.
17. НИКАБАДЗЕ М. У. *К градиентам мест в теории оболочек с двумя базовыми поверхностями*. Изв. РАН. МТТ, 2001, № 4, 80–90; англ. пер.: НИКАБАДЗЕ М. У. *Location gradients in the theory of shells with two basic surfaces*. Mech. Solids, **36**:4 (2001), 64–69.
18. НИКАБАДЗЕ М. У. *Уравнения теории оболочек, согласованные с граничными условиями на лицевых поверхностях*. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 2007, № 3, 72–76; англ. пер.: НИКАБАДЗЕ М. У. *Shell theory equations consistent with boundary conditions at face surfaces*. Moscow Univ. Mech. Bull., **62**:2 (2005), 59–63.
19. САРКИСЯН С. О. *Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек*. Изв. НАН Армении. Механика, **58**:2 (2005), 84–95.
20. САРКИСЯН С. О., ВАРДАНЯН С. А. *Асимптотический анализ уравнений и граничных условий термоупругости микрополярных тонких пластин*. Изв. НАН Армении. Механика, **60**:3 (2007), 64–76.
21. САРКИСЯН С. О. *Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости*. ПММ, **72**:1 (2008), 129–147.
22. САРКИСЯН С. О. *Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости*. Докл. НАН Армении, **108**:4 (2008), 309–319.
23. САРКИСЯН С. О. *Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости*. Физическая мезомеханика, **11**:5 (2008), 41–54.
24. ERINGEN A. C. *Theory of micropolar plates*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, **18**:1 (1967), 12–30.
25. НИКАБАДЗЕ М. У. *Метод ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел*. I. Деп. в ВИНТИ РАН, 21.05.14, № 135-В2014, 278 с.
26. НИКАБАДЗЕ М. У. *Метод ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел*. II. Деп. в ВИНТИ РАН, 21.05.14, № 136-В2014, 218 с.
27. НИКАБАДЗЕ М. У. *Математическое моделирование деформирования многослойных тонких тел*. Современ. математика и ее прилож., **20** (2011), 40–74; англ. пер.: НИКАБАДЗЕ М. У. *Mathematical Modeling of Multilayer Thin Body Deformation*. J. Math. Sci., **187**:3 (2012), 300–336.
28. НИКАБАДЗЕ М. У. *Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел*. Изд-во Попечит. совета мех.-мат. ф-та МГУ, М., 2014. 515 с.

Михаил Ушангиевич Никабадзе
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: munikabadze@yandex.ru

Поступило 03.03.2014

Some Variants of Micropolar Shell Theory Equations

M. U. NIKABADZE

Abstract. Some questions of parameterization of a shell region for an arbitrary base surface are considered. Due to the three-dimensional equations of micropolar deformable solid, the corresponding equations of the micropolar theories of shells, TS class shells and prismatic shells are obtained. In particular, the equations of the micropolar (extended micropolar) theory of shells with respect to the force tensor and moment tensor (tensors of forces, moments and second order moments) are derived. In addition, these equations and equations of micropolar shell theories of TS class and prismatic shells are obtained with respect to the contravariant components of the above tensors. The boundary conditions of the physical content are derived.

Keywords: micropolar shell theory, extended micropolar shell theory, force tensor, moment tensor, second order moment tensor.

MSC2010: 74K20, 74K25



0-Gaps on 3D Digital Curves

ANGELO MAIMONE, GIORGIO NORDO

Abstract. In digital geometry, gaps are some basic portion of a digital object that a discrete ray can cross without intersecting any voxel of the object itself. Such a notion is quite important in combinatorial image analysis and is strictly connected with some applications in fields as CAD and computer graphics. In this paper we prove that the number of 0-gaps of a 3D digital curve can be expressed as a linear combination of the number of its i -cells ($i = 0, \dots, 3$).

Keywords: digital geometry, digital curve, 0-gap, i -tandem, i -hub, adjacency relation, grid cell model, free cell.

MSC2010: Primary: 52C35; Secondary: 52C99

1. Introduction

By the word “gap” in digital geometry we mean some basic portion of a digital object that a discrete ray can cross without intersecting any voxel of the object itself. Since such a notion is strictly connected with some applications in the field of Computer graphics (e.g., the rendering of a 3D image by the ray-tracing technique), many papers (see, for example, [1]–[4]) concern the study of 0- and 1-gaps of 3-dimensional objects.

More recently, in [5] and [6] two formulas which express, respectively, the number of 1-gaps of a generic 3D object of dimension $\alpha = 1, 2$ and the number of $(n - 2)$ -gaps of a generic digital n -object by means of a few simple intrinsic parameters of the object itself were found. Furthermore, in [7] the relationship existing between the dimension of a 2D digital object equipped with an adjacency relation A_α , $\alpha \in \{0, 1\}$, and the number of its gaps were investigated.

In the next section we recall and formalize some basic definitions and properties of the general n -dimensional digital spaces with particular regard to the notions of block, tandem and gap.

In Section 3, we restrict our attention to digital curves in 3D digital spaces, deriving some particular cases of the propositions above recalled in order to prove our main result which states that the number g_0 of 0-gaps of a 3D digital curve γ can be expressed as a linear combination of the number $c - i$ of its i -cells, with $i = 0, \dots, 3$, and, more precisely, that $g_0 = \sum_{i=0}^3 (-1)^{i+1} 2^i c_i$.

This research was supported by Italian P.R.I.N., P.R.A. and I.N.D.A.M. (G.N.S.A.G.A.).

2. Preliminaries

Throughout this paper we use the *grid cell model* for representing digital objects, and we adopt the terminology from [8] and [9].

Let $x = (x_1, \dots, x_n)$ be a point of \mathbb{Z}^n , $\theta \in \{-1, 0, 1\}^n$ be an n -word over the alphabet $\{-1, 0, 1\}$, and $i \in \{1, \dots, n\}$. We define i -cell related to x and θ and denote it by $e = (x, \theta)$, the Cartesian product in a certain fixed order of $n - i$ singletons $\{x_j \pm \frac{1}{2}\}$ by i closed sets $[x_j - \frac{1}{2}, x_j + \frac{1}{2}]$, i.e., we set

$$e = (x, \theta) = \prod_{j=1}^n \left[x_j + \frac{1}{2}\theta_j - \frac{1}{2}[\theta_j = 0], x_j + \frac{1}{2}\theta_j + \frac{1}{2}[\theta_j = 0] \right],$$

where $[\bullet]$ denotes the Iverson bracket [10]. The word θ is called the *direction* of the cell (x, θ) related to the point x .

Let us note that an i -cell can be related to different point $x \in \mathbb{Z}^n$ and, once we have fixed it, can be related to different direction. So, when we talk generically about i -cell, we mean one of its possible representation.

The dimension of a cell $e = (x, \theta)$, denoted by $\dim(e) = i$, is the number of non-trivial interval of its product representation, i.e., the number of null components of its direction θ . Thus, $\dim(e) = \sum_{j=1}^n [\theta_j = 0]$ or, equivalently, $\dim(e) = n - \theta \cdot \theta$. So, e is an i -cell if and only if it has dimension i .

We denote by $\mathbb{C}_n^{(i)}$ the set of all i -cells of \mathbb{R}^n and by \mathbb{C}_n the set of all cells defined in \mathbb{R}^n , i.e., we set $\mathbb{C}_n = \bigcup_{j=0}^n \mathbb{C}_n^{(j)}$. An n -cell of \mathbb{C}_n is also called an n -voxel. So, for convenience, an n -voxel is denoted by v , while we use other lower case letter (usually e) to denote cells of lower dimension. A finite collection D of n -voxels is a digital n -object. For any $i = 0, \dots, n$, we denote by $C_i(D)$ the set of all i -cells of the object D , that is, $D \cap \mathbb{C}_n^{(i)}$, and by $c_i(D)$ (or simply by c_i if no confusion arises) its cardinality $|C_i(D)|$.

We say that two n -cells v_1, v_2 are i -adjacent, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, if $v_1 \neq v_2$ and there exists at least one i -cell \bar{e} such that $\bar{e} \subseteq v_1 \cap v_2$, that is if they are distinct and share at least one i -cell. Two n -cells v_1, v_2 are *strictly* i -adjacent, if they are i -adjacent but not j -adjacent, for any $j > i$, that is, if $v_1 \cap v_2 \in \mathbb{C}_n^{(i)}$. The set of all n -cells that are i -adjacent to a given n -voxel v is denoted by $A_i(v)$ and called the *i -adjacent neighborhoods* of v . Two cells $v_1, v_2 \in \mathbb{C}_n$ are *incident* to each other, and we write $e_1 I e_2$, if $e_1 \subseteq e_2$ or $e_2 \subseteq e_1$.

Definition 1. Let $e_1, e_2 \in \mathbb{C}_n$. We say that e_1 *bounds* e_2 (or that e_2 is *bounded* by e_1), and we write $e_1 < e_2$ if $e_1 I e_2$ and $\dim(e_1) < \dim(e_2)$. The relation $<$ is called *bounding relation*.

Definition 2. An incidence structure (see [11]) is a triple $(V, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ where V and \mathcal{B} are any two disjoint sets and \mathcal{I} is a binary relation between V and \mathcal{B} , that is, $\mathcal{I} \subseteq V \times \mathcal{B}$. The elements of V are called *points*, those of \mathcal{B} blocks. Instead of $(p, B) \in \mathcal{I}$, we simply write $p \mathcal{I} B$ and say that *the point p lies on the block B* or *p and B are incident*.

If p is any point of V , we denote by (p) the set of all blocks incident to p , i.e., $(p) = \{B \in \mathcal{B} : p \mathcal{I} B\}$. Similarly, if B is any block of \mathcal{B} , we denote by (B) the set of all points incident to each other B , i.e., $(B) = \{p \in V : p \mathcal{I} B\}$. For a point p , the

number $r_p = |(p)|$ is called the degree of p , and similarly, for a block B , $k_B = |(B)|$ is the degree of B .

Let us remind the following fundamental proposition of incidence structures.

Proposition 1. *Let $(V, \mathcal{B}, \mathcal{T})$ be an incidence structure. We have*

$$\sum_{p \in V} r_p = \sum_{B \in \mathcal{B}} k_B, \quad (1)$$

where r_p and k_B are the degrees of any point $p \in V$ and any block $B \in \mathcal{B}$, respectively.

Definition 3. Let e be an i -cell, $0 \leq i \leq n-1$, of \mathbb{C}_n . Then an i -block centered on e , denoted by $B_i(e)$, is the union of all the n -voxels bounded by e , i.e., $B_i(e) = \bigcup \{v \in \mathbb{C}_n^{(n)} : e < v\}$.

Remark 1. Let us note that, for any i -cell e , $B_i(e)$ is the union of exactly 2^{n-i} n -voxels and $e \in B_i(e)$.

Definition 4. Let v_1, v_2 be two n -voxels of a digital object D and e be an i -cell, $i = 0, \dots, n-1$. We say that $\{v_1, v_2\}$ forms an i -tandem of D over e and denote it by $t_i(e)$ if $D \cap B_i(e) = \{v_1, v_2\}$, v_1 and v_2 are strictly i -adjacent and $v_1 \cap v_2 = e$.

Definition 5. Let D be a digital n -object and e be an i -cell, $i = 0, \dots, n-2$. We say that D has an i -gap over e if there exists an i -block $B_i(e)$ such that $B_i(e) \setminus D$ is an i -tandem over e . The cell e is called i -hub of the related i -gap. Moreover, we denote by $g_i(D)$ (or simply by g_i if no confusion arises) the number of i -gap of D .

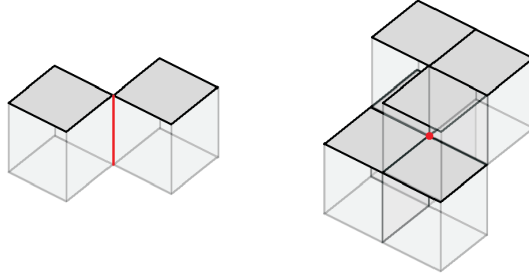


Fig. 1. Configurations of 1- and 0-gaps in \mathbb{C}_3

Notation 1. For any $i = 0, \dots, n-1$, we denote by $\mathcal{H}_i(D)$ (or simply by \mathcal{H}_i if no confusion arises) the sets of all i -hubs of D . Clearly, we have $|\mathcal{H}_i| = g_i$.

Definition 6. An i -cell e ($i = 0, \dots, n-1$) of a digital n -object D is free if $B_i(e) \not\subseteq D$.

Notation 2. For any $i = 0, \dots, n-1$, we denote by $C_i^*(D)$ (respectively, by $C_i'(D)$) the set of all free (respectively, non-free) i -cells of the object D . Moreover, we denote by $c_i^*(D)$ (or simply by c_i^*) the number of free i -cells of D and by $c_i'(D)$ (or simply by c_i') the number of non-free cells.

Remark 2. It is evident that $\{C_i^*(D), C_i'(D)\}$ forms a partition of $C_i(D)$ and that $c_i = c_i^* + c_i'$.

Proposition 2. *Let D be a digital n -object. Then $c_2 = 6c_3 - c'_2$.*

Proof. Let us consider the set $F = \bigcup_{v \in C_n(D)} \{(e, v) : e \in C_{n-1}(D), e < v\}$. It is evident that

$$|F| = |\{(e, v) : e \in C_{n-1}(D), e < v\}| |C_n(D)| = c_{n-1 \rightarrow n} \cdot c_n = 2nc_n.$$

Let us set

$$F^* = F \cap (C_{n-1}^*(D) \times C_n(D)), \quad F' = F \cap (C'_{n-1}(D) \times C_n(D)).$$

The map $\phi: F^* \rightarrow C_{n-1}^*(D)$, defined by $\phi(e, v) = e$, is a bijection. In fact, besides being evidently surjective, it is also injective, since if by contradiction there were two distinct pairs (e, v_1) and $(e, v_2) \in F^*$ associated to e , then $B_{n-1}(e) = \{v_1, v_2\}$ should be an $(n-1)$ -block contained in D . This contradicts the fact that the $(n-1)$ -cell e is free. Thus $|F^*| = |C_{n-1}^*(D)| = c_{n-1}^*$.

On the other hand, it results that

$$\begin{aligned} |F'| &= \left| \bigcup_{v \in C_n(D)} \{(e, v) : e \in C'_{n-1}(D), e < v\} \right| \\ &= \left| \bigcup_{e \in C'_{n-1}(D)} \{(e, v) : v \in C_n(D), e < v\} \right| \\ &= |\{(e, v) : v \in C_n(D), e < v\}| |C'_{n-1}(D)| \\ &= c_{n-1 \leftarrow n} c'_{n-1} = 2c'_{n-1}. \end{aligned}$$

Since $\{F^*, F'\}$ is a partition of F , we finally have that $|F| = |F^*| + |F'|$, i.e., $2nc_n = c_{n-1}^* + 2c'_{n-1} = c_{n-1} - c'_{n-1} + 2c'_{n-1} = c_{n-1} + c'_{n-1}$, and then the thesis.

Notation 3. *Let i, j be two natural numbers such that $0 \leq i < j$. We denote by $c_{i \rightarrow j}$ the maximum number of i -cells of \mathbb{C}_n that bound a j -cell. Moreover, we denote by $c_{i \leftarrow j}$ the maximum number of j -cell of \mathbb{C}_n that are bounded by an i -cell.*

The following three propositions were proved in [6].

Proposition 3. *For any $i, j \in \mathbb{N}$ such that $0 \leq i < j$, we have*

$$c_{i \rightarrow j} = 2^{j-i} \binom{j}{i}.$$

Proposition 4. *For any $i, j \in \mathbb{N}$ such that $0 \leq i < j$, we have*

$$c_{i \leftarrow j} = 2^{j-i} \binom{n-i}{j-i}.$$

Proposition 5. *Let D be a digital n -object. Then $c_{n-1} = 2nc_n - c'_{n-1}$.*

Notation 4. *Let e be an i -cell of a digital n -object D and $0 \leq i < j$. We denote by $b_j(e, D)$ (or simply by $b_j(e)$ if no confusion arises) the number of j -cells of $bd(D)$ that are bounded by e .*

Let us note that if e is a non-free i -cell, then $b_j(e) = 0$.

Proposition 6. Let v be an n -voxel and e be one of its i -cells, $i = 0, \dots, n - 1$. Then, for any $i < j \leq n$, it results that

$$b_j(e) = \frac{c_{i \rightarrow j} c_{j \rightarrow n}}{c_{i \rightarrow n}}.$$

3. Gaps and curves in 3D digital space

Throughout the rest of the paper we consider the 3-dimensional digital space \mathbb{Z}^3 with the corresponding grid cell model \mathbb{C}_3 .

Definition 7. A digital object γ of \mathbb{C}_3 is called a *digital k -curve* if it satisfies the following two condition:

- $\forall v \in \gamma$ it is $1 \leq |A_k(v)| \leq 2$,
- for any $v \in \gamma$, if $v_1, v_2 \in A_k(v)$, then $\{v_1, v_2\} \notin A_k(v)$,

that is, for any voxel $v \in \gamma$ there exist at most two voxels k -adjacent to v , and every pair of voxels k -adjacent to a voxel of γ can not be k -adjacent to each other.

The voxels in γ which have only one k -adjacent voxel are called the extreme points of the curve.

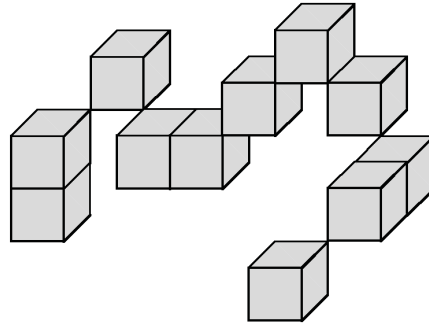


Fig. 2. An example of a digital 0-curve in \mathbb{C}_3

We are interested only in a digital 0-curve and, if no confusion arises, we will briefly call it a digital curve.

The following propositions derive from some general ones proved in [6] for the n -dimensional case.

Proposition 7. Let v be a voxel and e be one of its i -cell, $i = 0, \dots, 2$. Then, for any $i < j \leq 2$, we have

$$b_j(e) = \binom{3-i}{j-i}.$$

Proposition 8. Let e be a 2-cell of \mathbb{C}_3 . Then the number of i -cells, $i = 0, \dots, 2$, of the 2-block centered on e is

$$c_i(B_2(e)) = \frac{9+i}{6} c_{i \rightarrow 3}.$$

In order to obtain our main result, we need to prove the following result.

Proposition 9. *The number of i -cells, $i = 0, 1$, of an 1-tandem $t_1(e)$ is*

$$c_i(t_1) = \frac{42 + 5i - i^2}{24} c_{i \rightarrow 3}.$$

Proof. By definition, $t_1(e)$ is composed of two strictly 1-adjacent voxels. Each of such voxels has exactly $c_{i \rightarrow 3}$ i -cells. But some of these cells are repeated onto $t_1(e)$. The number of these repeated i -cells coincides with the number of i -cells of the 1-hub e . Since

$$\binom{1}{i} = \frac{(n-i)(n-i-1)}{n(n-1)} \binom{n}{i},$$

we have

$$\begin{aligned} c_i(t_{n-2}(e)) &= 2c_{i \rightarrow n} - c_{i \rightarrow n-2} \\ &= 2 \cdot 2^{n-i} \binom{n}{i} - 2^{n-2-i} \binom{n-2}{i} \\ &= \frac{7n^2 - 7n + 2in - i^2 - i}{4n(n-1)} c_{i \rightarrow n}. \end{aligned}$$

The following useful proposition was proved in [5].

Proposition 10. *The number of 1-gaps of a digital object D of \mathbb{C}_3 is given by*

$$g_1 = 2c_2^* - c_1^*. \quad (2)$$

Proposition 11. *Let e be a free vertex that bounds the center e' of a 2-block $B_2(e')$. Then $b_1(e) = 4$.*

Proof. Let us consider the incidence structure $(C_0(B_2(e')), C_1(B_2(e')), <)$. By Proposition 1, we have

$$\sum_{a \in C_0(B_2(e'))} r_a = \sum_{a \in C_1(B_2(e'))} k_a.$$

Let us note that, by Proposition 8, we have $|C_1(B_2(e'))| = 20$ and $|C_0(B_2(e'))| = 12$. Since, for any $a \in C_1(B_2(e'))$ we have $k_a = c_{0 \rightarrow 1} = 2$, it follows that

$$\sum_{a \in C_1(B_2(e'))} k_a = 2|C_1(B_2(e'))| = 40. \quad (3)$$

Let us now consider the sets

$$F = \{a \in C_0(B_2(e')) : a < e'\}, \quad G = \{a \in C_0(B_2(e')) : a \not< e'\}.$$

Since $\{F, G\}$ forms a partition of $C_0(B_2(e'))$, we can write

$$\sum_{a \in C_0(B_2(e'))} r_a = \sum_{a \in F} r_a + \sum_{a \in G} r_a.$$

For any $a \in F$, let us set $r_a = b_1(e)$. We obtain

$$\sum_{a \in F} r_a = |F|b_1(e) = c_{0 \rightarrow 2}b_1(e) = 4b_1(e). \quad (4)$$

Instead, by Proposition 7, for any $a \in G$, we have

$$r_a = b_1(a) = \begin{pmatrix} 3 & -0 \\ 1 & -0 \end{pmatrix} = 3,$$

and so,

$$\sum_{a \in G} r_a = 3|G| = 3(|C_0(B_2(e'))| - c_{0 \rightarrow 2}) = 3(12 - 4) = 24. \quad (5)$$

To sum up, by using Equations (3)–(5), we can write $4b_1(e) + 24 = 40$, from which we get the thesis.

Proposition 12. *Let γ be a digital curve of \mathbb{C}_3 . Then the number of 0-cells that bound some non-free 2-cell is $4c'_2$.*

Proof. Since $c'_2(\gamma)$ coincides with the number of 2-block of γ , and since any non-free 2-cell is bounded by $c_{0 \rightarrow 2} = 4$ 0-cells, the number of 0-cells that bounds some non-free 2-cell is exactly $4c'_2$.

Proposition 13. *For any $i, j \in \mathbb{N}$ such that $0 \leq i < j$, we have*

$$c_{i \leftarrow j} = 2^{j-i} \binom{n-i}{j-i}.$$

Proposition 14. *Let D be a digital object of \mathbb{C}_3 and $e \in \mathcal{H}_0$. Then $b_1(e) = 6$.*

Proof. Since the number $b_1(e)$ of 1-cells of D bounded by e coincides with the maximum number of 1-cells bounded by a 0-cell, by Proposition 13, we have

$$b_1(e) = c_{0 \leftarrow 1} = 2^{1-0} \binom{3-0}{1-0} = 6.$$

We have the following lemma.

Lemma 1. *The number of 0-cells and 1-cells of a 1-tandem $t_1(e)$ is $c_0(t_1(e)) = 14$ and $c_1(t_1(e)) = 23$, respectively.*

Proof. It directly follows from Proposition 9 for $n = 3$ and $i = 0$ or $i = 1$, respectively.

Proposition 15. *Let e be a 0-cell that bounds a 1-hub. Then $b_1(e) = 5$.*

Proof. Let e' a 1-hub that is bounded by e and $t_1(e')$ the related 1-tandem. Moreover, let us consider the incidence structure $(C_0(t_1(e')), C_1(t_1(e')), <)$. By Proposition 1, we can write

$$\sum_{a \in C_0(t_1(e'))} r_a = \sum_{a \in C_1(t_1(e'))} k_a.$$

By Lemma 1, we have $|C_0(t_1(e'))| = 14$ and $|C_1(t_1(e'))| = 23$. Moreover, since for any $a \in C_1(t_1(e'))$, $k_a = c_{0 \rightarrow 2} = 2$, it follows that

$$\sum_{a \in C_1(t_1(e'))} k_a = 2|C_1(t_1(e'))| = 46.$$

Now, let us set

$$\begin{aligned} F &= \{a \in C_0(t_1(e')) : a < e'\}, \\ G &= \{a \in C_0(t_1(e')) : a \not< e'\}. \end{aligned}$$

Since $\{F, G\}$ is a partition of $C_0(t_1(e'))$, we have

$$\sum_{a \in C_0(t_1(e'))} r_a = \sum_{a \in F} r_a + \sum_{a \in G} r_a.$$

Let us calculate $\sum_{a \in F} r_a$. If we set $r_a = b_1(e)$, we have

$$\sum_{a \in F} r_a = |F|b_1(e) = c_{0 \rightarrow 1}b_1(e) = 2b_1(e).$$

Now, let us calculate $\sum_{a \in G} r_a$. By Proposition 7, for any $a \in G$, we have

$$r_a = b_1(a) = 3.$$

Hence, we get

$$\sum_{a \in G} r_a = 3|G| = 3(|C_0(t_1(e'))| - c_{0 \rightarrow 1}) = 36.$$

To sum up, we have $2b_1(e) + 36 = 46$, from which we get $b_1(e) = 5$.

Proposition 16. *Let γ be a digital curve of \mathbb{C}_3 . Then the number of 0-cells that bounds some 1-hub of γ is $2g_1$.*

Proof. Since any 1-hub is bounded by $c_{0 \rightarrow 1}$ 0-cell, the number of 0-cells that bounds some 1-hub is exactly $2g_1$.

By applying Proposition 7 with $i = 0$ and $j = 1$, we can easily prove the following proposition.

Proposition 17. *Let e be a 0-cell of a voxel $v \in \mathbb{C}_3$. Then $b_1(e) = 3$.*

Theorem 1. *Let γ be a digital curve of \mathbb{C}_3 . Then the number of its 0-gaps is given by*

$$g_0 = \sum_{i=0}^3 (-1)^{i+1} 2^i c_i.$$

Proof. Let us consider the incidence structure $(C_0(\gamma), C_1(\gamma), <)$. By Proposition 1, we have

$$\sum_{a \in C_0(\gamma)} r_a = \sum_{a \in C_1(\gamma)} k_a.$$

Evidently, for any $a \in C_1(\gamma)$, we have that $k_a = 2$. So,

$$\sum_{a \in C_1(\gamma)} k_a = 2|C_1(\gamma)| = 2c_1. \quad (6)$$

Let us denote by $H_i(\gamma)$, $i = 0, 1$, and by $C'_2(\gamma)$ the sets of 0- and 1-hubs and the set of non-free 2-cells of γ , respectively. Let us now calculate $\sum_{a \in \mathbb{C}_0(\gamma)} r_a$. In order to do that, let us consider the following sets of 0-cells:

$$\begin{aligned} A &= \{c \in \mathbb{C}_0(\gamma) : c \in H_0(\gamma)\}, \\ B &= \{c \in \mathbb{C}_0(\gamma) : c < e, e \in H_1(\gamma)\}, \\ C &= \{c \in \mathbb{C}_0(\gamma) : c < e, e \in C'_2(\gamma)\}, \\ D &= \mathbb{C}_0(\gamma) \setminus (A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Since $\{A, B, C, D\}$ forms a partition of $\mathbb{C}_0(\gamma)$, we have

$$\sum_{a \in \mathbb{C}_0(\gamma)} r_a = \sum_{a \in A} r_a + \sum_{a \in B} r_a + \sum_{a \in C} r_a + \sum_{a \in D} r_a.$$

Let us calculate $\sum_{a \in A} r_a$. By Proposition 14, for any $a \in A$ it is $r_a = 6$. Evidently $|A| = g_0$. Hence

$$\sum_{a \in A} r_a = r_a |A| = 6g_0. \quad (7)$$

Let us calculate $\sum_{a \in B} r_a$. By Proposition 15, for any $a \in B$, we have $r_a = 5$. Moreover, by Proposition 16, $|B| = 2g_1$. So,

$$\sum_{a \in B} r_a = r_a |B| = 10g_1. \quad (8)$$

Let us calculate $\sum_{a \in C} r_a$. By Proposition 11, for any $a \in C$, we have $r_a = 4$, and by Proposition 12, $|C| = 4c'_2$. It follows that

$$\sum_{a \in C} r_a = r_a |C| = 16c'_2. \quad (9)$$

Finally, let us calculate $\sum_{a \in D} r_a$. By Proposition 17, for any $a \in D$, we have $r_a = 3$. Moreover, $|D| = c_0 - 4c'_2 - 2g_1 - g_0$. So,

$$\sum_{a \in D} r_a = r_a |D| = 3(c_0 - g_0 - 2g_1 - 4c'_2). \quad (10)$$

Combining the Equations (7)–(10), we obtain $6g_0 + 10g_1 + 16c'_2 + 3c_0 - 3g_0 - 6g_1 - 12c'_2 = 2c_1$, that is,

$$3c_0 + 4c'_2 + 4g_1 + 3g_0 = 2c_1. \quad (11)$$

Using Proposition 10, we get $3c_0 + 4c'_2 + 8c_2^* - 4c_1 + 3g_0 = 2c_1$, since $c_2 = c'_2 + c_2^*$, $3c_0 + 4c_2 + 4c_2^* + 3g_0 = 6c_1$. Moreover, by Proposition 2, we get $-c'_2 = c_2 - 6c_3$. So, we can write

$$c_2^* = c_2 - c'_2 = c_2 + c_2 - 6c_3 = 2c_2 - 6c_3.$$

Substituting the last expression in Equation (11), we have

$$3c_0 + 4c_2 + 8c_2 - 24c_2 + 3g_0 = 6c_1,$$

that is,

$$3c_0 + 12c_2 - 24c_3 + 3g_0 = 6c_1,$$

from which we finally get $g_0 = \sum_{i=0}^3 (-1)^{i+1} 2^i c_i$.

References

1. BRIMKOV V.E., MAIMONE A., NORDO G. *An explicit formula for the number of tunnels in digital objects*, [arXiv:cs/0505084](https://arxiv.org/abs/cs/0505084).
2. BRIMKOV V.E., MAIMONE A., NORDO G., BARNEVA R.P., KLETTE R. *The number of gaps in binary pictures*. Proceedings of the ISVC 2005 Lake Tahoe, NV, USA, December 5–7, 2005 (Eds.: Bebis G., Boyle R., Koracin D., Parvin B.), Lecture Notes in Computer Science, **3804** (2005), 35–42.
3. BRIMKOV V.E., MAIMONE A., NORDO G. *Counting gaps in binary pictures*. Proceedings of the 11th International Workshop, IWCIA 2006, Berlin, GERMANY, June 2006 (Eds.: Reulke R., Eckardt U., Flach B., Knauer U., Polthier K.), Lecture Notes in Computer Science, LNCS, **4040** (2006), 16–24.
4. BRIMKOV V.E., NORDO G., MAIMONE A., BARNEVA R.P. *Genus and dimension of digital images and their time and space-efficient computation*. Internat. J. Shape Modelling, **14** (2008), 147–168.
5. MAIMONE A., NORDO G. *On 1-gaps in 3D digital objects*. Filomat, **25** (2011), 85–91.
6. MAIMONE A., NORDO G. *A formula for the number of $(n-2)$ -gaps in digital n -objects*. Filomat, **27** (2013), 547–557.
7. MAIMONE A., NORDO G. *A note on dimension and gaps in digital geometry*. Filomat, **29** (2015) (to appear).
8. KLETTE R., ROSENFELD A. *Digital geometry – geometric methods for digital picture analysis*. Morgan Kaufmann, San Francisco, 2004.
9. KOVALEVSKY V. A. *Finite topology as applied to image analysis*. Computer Vision, Graphics and Image Processing, **46:2** (1989), 141–161.
10. KNUTH D. *Two Notes on Notation*. American Mathematics Monthly, **99:5** (1992), 403–422.
11. BETH T., JUNGNIKEL D., LENZ H. *Design theory*. V. I, II. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

ANGELO MAIMONE
Dipartimento di Matematica e Informatica,
Università degli Studi di Messina,
Sant’Agata–Messina, Italy
E-mail: angelomaimone@libero.it

Received 27.01.2015

GIORGIO NORDO
Dipartimento di Matematica e Informatica,
Università degli Studi di Messina,
Sant’Agata–Messina, Italy
E-mail: giorgio.nordo@unime.it



УДК 524

Теория пятимерной тороидальной Гипервселенной

Р. В. ХАЧАТУРОВ

Представлено Дж. Нордо

Аннотация. Предложена математическая модель, которая объясняет наблюдаемый процесс ускоренного расширения Вселенной без помощи таких понятий, как “темная энергия” и “темная материя”. Определено понятие Гипервселенной. Обосновано предположение, что наша Вселенная представляет собой расширяющуюся (в настоящий момент с ускорением) трехмерную гиперповерхность четырехмерного шара (гиперсферу) радиусом около 10 млрд св. лет и объемом около 20000 (млрд св. лет)³, а Гипервселенная – вращающийся пятимерный тор. Получены периодические законы изменения скорости, ускорения и радиуса нашей Вселенной при ее движении по поверхности пятимерного тора Гипервселенной. Объяснено явление гравитации. В соответствии с теорией Гипервселенной, описанной в данной работе, никакого Большого взрыва не было, Вселенная не возникла из сингулярности и никогда в нее не сожмется, но и не расширится до бесконечности, а будет циклически расширяться и сжиматься в процессе ее движения вдоль поверхности пятимерного тора Гипервселенной.

Ключевые слова: космология, астрофизика, математическое моделирование, строение Вселенной, Гипервселенная.

1. Введение

Современные астрофизические наблюдения и измерения показывают, что скорость удаления любых двух достаточно отдаленных друг от друга объектов в нашей Вселенной с высокой точностью прямо пропорциональна расстоянию



Рис. 1. Иллюстрация эффекта Доплера

между ними. Это было обнаружено и много раз проверено с помощью эффекта Доплера – изменения длины электромагнитной волны, вызванного движением источника относительно приемника (рис. 1).

© Московский финансово-юридический университет МФЮА, 2015
© Moscow University of Finance and Law MFUA, 2015

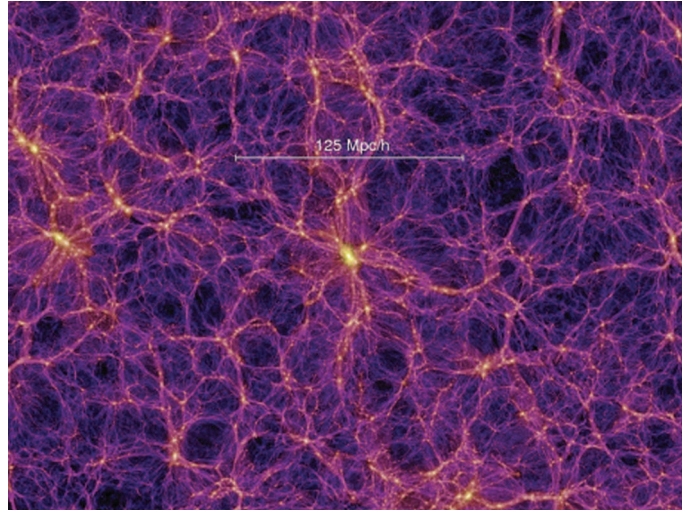


Рис. 2. Крупномасштабная структура Вселенной [1]

Наблюдаемый закон расширения Вселенной также означает, что в какой бы точке нашей Вселенной мы ни оказались, создастся впечатление, что мы находимся в центре Вселенной (рис. 2), а все остальные ее объекты удаляются от нас. Причем чем дальше они находятся от нас, тем быстрее удаляются. Зная расстояние до них, можно приближенно определить скорость их удаления с помощью закона Хаббла

$$V = \frac{dD}{dt} = H_0 D,$$

где V – скорость удаления объекта, D – расстояние до него, H_0 – постоянная Хаббла в настоящий момент. Большинство независимых оценок H_0 дают для этого параметра значение $65 \div 75$ км/с на мегапарсек (~ 3.26 млн св. лет), или $20 \div 23$ км/с на миллион световых лет [1]–[16].

Простая линейная экстраполяция этого закона привела к возникновению теории Большого взрыва, согласно которой наша Вселенная возникла из сингулярности и начала расширяться в результате некоего первоначального взрыва. Создателей и последователей этой теории не смущает даже тот факт, что в окружающем нас мире ничего линейного нет. Отметим также, что ни один из известных нам взрывов не распространяется по такому закону. Наоборот, в любом взрыве (от пневматического до термоядерного) чем дальше осколки (или частицы взрыва) от эпицентра, тем меньше их скорость, что полностью соответствует известным нам законам физики. Кроме того, если бы наша Вселенная расширялась по законам любого обычного взрыва, то можно было бы довольно легко определить и направление к центру этого взрыва, т. е. к центру Вселенной. Однако в нашем случае это невозможно, так как все направления равноправны, а Вселенная имеет однородную (в большом масштабе) ячеистую структуру (см. рис. 2), что также очень плохо согласуется с теорией Большого взрыва. Более того, самые современные результаты астрофизических наблюдений и измерений позволяют понять, что наша Вселенная не просто расширяется по закону Хаббла, сохраняя свою регулярную структуру, но расширяется с дополнительным положительным ускорением. Для объяснения этого факта срав-

нительно недавно была выдвинута гипотеза о существовании некой загадочной “темной энергии”, которая не дает гравитационным силам обычной материи замедлять скорость расширения Вселенной. Из этого, в свою очередь, делается весьма слабо обоснованный вывод, что Вселенная будет расширяться бесконечно с возрастающей скоростью.

Предлагаемая в настоящей и предыдущих работах автора математическая модель Гипервселенной [2]–[7] объясняет наблюдаемый процесс ускоренного расширения Вселенной без помощи таких понятий, как “темная энергия” и “темная материя”. Обосновано предположение, что наша Вселенная представляет собой расширяющуюся (в настоящий момент с ускорением) трехмерную гиперповерхность четырехмерного шара (гиперсферу) радиусом около 10 млрд св. лет и объемом около 20000 (млрд св. лет)³, а Гипервселенная – вращающийся пятимерный тор (см. далее рис. 4). Получены периодические законы изменения скорости, ускорения и радиуса Вселенной при ее движении по поверхности пятимерного тора Гипервселенной. Начиная с 2010 г. результаты этих исследований более 10 раз были доложены на различных конференциях, организованных Российской академией космонавтики им. К. Э. Циолковского (РАКЦ) и Российской академией наук (РАН), и опубликованы в трудах и тезисах этих конференций.

2. Объяснение наблюдаемого закона расширения нашей Вселенной, оценка ее линейных размеров и объема

Представим себе обычную сферу с увеличивающимся радиусом и центром в точке O . Если мы отметим на ней точки A , B , C такие, что

$$|AB| = |BC| = \frac{|AC|}{2},$$

то увидим, что при увеличении с некоторой скоростью V_R радиуса $R(t)$ этой сферы скорость удаления точки B от точки A (вдоль поверхности сферы) будет равна скорости удаления точки C от точки B и в два раза меньше скорости удаления точки C от точки A (рис. 3). За расстояние между любыми двумя

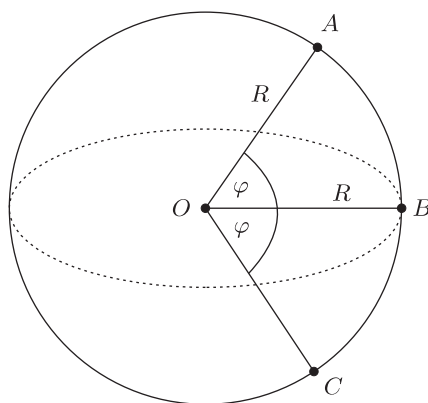


Рис. 3. Иллюстрация закона расширения Вселенной

точками на сфере мы здесь принимаем длину кратчайшей дуги, соединяющей их. В самом деле, в таком случае будут выполняться следующие уравнения:

$$|AB| = \varphi R(t) = \varphi V_R t, \quad |BC| = \varphi R(t) = \varphi V_R t, \quad |AC| = 2\varphi R(t) = 2\varphi V_R t,$$

где φ – соответствующий центральный угол.

Это полностью соответствует наблюдаемому закону, по которому расширяется наша Вселенная. Поэтому в случае двумерного пространства достаточно предположить, что Вселенная – это не бесконечная плоскость, а сфера с очень большим радиусом кривизны. Тогда при увеличении радиуса этой сферы с некоторой скоростью любые две точки на ней (как было показано выше) будут удаляться друг от друга тем быстрее, чем дальше друг от друга находятся, т. е. в любой ее точке будет выполняться закон Хаббла. При этом с первых же мгновений после Большого взрыва, если бы таковой был, центр этой Вселенной оказался бы вне ее, а именно – в центре расширяющейся сферы. Аналогично, в случае трехмерного пространства наша Вселенная может являться трехмерной гиперповерхностью четырехмерного шара с очень большим радиусом кривизны. Тогда ее расширение с увеличением радиуса будет проходить по тому же закону, что и в двумерном случае, а центр будет всегда оставаться вне ее – в центре соответствующего четырехмерного шара. В таком случае, искать центр начального взрыва Вселенной внутри нее бесполезно – его там нет. Однако он мог бы “порождать” новые Вселенные – параллельные нашей. Это проще представить в двумерном случае – как вложенные друг в друга сферы разного радиуса с общим центром.

С давних пор людей интересует вопрос: бесконечна ли наша Вселенная? Гениальный древнегреческий философ Аристотель еще до того, как в науке появилось понятие нуля, а математика стала отдельной наукой, отвечал на этот вопрос с помощью следующих логических рассуждений: “Предположим, что Вселенная конечна. Тогда с конечной скоростью за конечное время мы можем добраться до ее конца. Но ничто не мешает нам философским усилием протянуть вперед руку. И продвинуться еще вперед на расстояние этой вытянутой руки. Так мы можем повторять делать сколько угодно раз. Следовательно, Вселенная бесконечна”. Это, несомненно, очень сильные и образные логические рассуждения для времени, когда даже математики как отдельной науки у человечества еще не было. Однако предлагаемая модель нашей Вселенной как трехмерной гиперповерхности четырехмерного шара показывает, что если бы Аристотель очень много раз продвигался на расстояние его вытянутой руки или если бы его рука была очень длинной, то он просто вернулся бы в точку, из которой начал свое путешествие (так как его трехмерная рука вместе с искривленным трехмерным пространством нашей Вселенной непрерывно изгибалась бы по направлению к центру четырехмерного шара).

В соответствии с предлагаемой моделью наша Вселенная бесконечна в том смысле, что у нее нет конца, так как она замкнута сама на себя, аналогично двумерной сфере. Однако она имеет конечный объем, хотя и очень большой. Этот объем можно приблизительно подсчитать. Для этого необходимо оценить величину радиуса кривизны нашей Вселенной. Самые дальние видимые объекты находятся на расстоянии около 12–15 млрд св. лет от нашей Галакти-

ки [1], [10]–[17]. Можно предположить, что это расстояние, на котором пересекаются (в силу кривизны нашей Вселенной) параллельные лучи света, исходящие от нашей Галактики. Соответственно, параллельные лучи света, исходящие оттуда, будут пересекаться (фокусироваться) в нашей точке наблюдения. Этим можно объяснить то, что мы наблюдаем такие яркие (учитывая огромные расстояния) и переменчивые объекты (например, гамма-всплески) на границе видимой Вселенной.

Исходя из этого четверть длины окружности главного сечения Вселенной будет составлять около 15 млрд св. лет, а величину соответствующего радиуса кривизны R можно приблизительно оценить как 10 млрд св. лет (эта величина соответствует и другим независимым оценкам линейного размера нашей Вселенной [17]). Воспользовавшись формулой объема трехмерной гиперповерхности четырехмерного шара $W_{S^3} = 2\pi^2 R^3$, можно вычислить приблизительный объем нашей Вселенной в кубических миллиардах световых лет:

$$W_U \approx 20000 \text{ (млрд св. лет)}^3.$$

Эта оценочная величина [3]–[7] показывает, что объем нашей Вселенной огромен, но все-таки конечен.

В соответствии с классической теорией Большого взрыва период расширения Вселенной должен смениться периодом ее сжатия, когда красное смещение сменится фиолетовым. Однако недавно обнаруженное в результате астрофизических наблюдений ускорение расширения Вселенной [10]–[16] дало возможность предполагать, что Вселенная может расширяться бесконечно. Какой сценарий является верным? И если Вселенная все же сожмется обратно в точку, то возродится ли она в таком случае вновь или исчезнет навсегда? А если Вселенная будет периодически сжиматься и расширяться, то не будут ли при этом сталкиваться параллельные (вложенные) вселенные? Предлагаемая в этой работе математическая модель Гипервселенной дает ответы на эти вопросы.

3. Пятимерная математическая модель Гипервселенной

Для того чтобы было легче представить описываемую модель, уберем две пространственные координаты. Тогда наша Вселенная предстанет в виде окружности с радиусом кривизны около 10 млрд св. лет. Расположим эту окружность на поверхности тора (рис. 4). Сам этот тор назовем *Гипервселенной*.

Предположим, что поверхность этого тора вращается, выворачиваясь изнутри наружу и обратно, как показано на рис. 4. Или сама эта окружность “скользит” по поверхности тора, циклически увеличивая и уменьшая свой радиус. В таком случае, период ее расширения будет плавно переходить в период сжатия и т. д. Важно отметить, что при этом параллельные Вселенные большего радиуса, уже начавшие сжиматься, не будут сталкиваться с Вселенными меньшего радиуса, продолжающими расширяться (см. рис. 4). Это объясняет возможность существования вложенных параллельных миров. Радиус кривизны Вселенной никогда не станет равным нулю: минимальное его значение будет равно внутреннему радиусу тора, а максимальное – внешнему.

При постоянных угловой ω_T и линейной U_T скоростях вращения поверхности тора (или движения окружности Вселенной по его поверхности) скорость

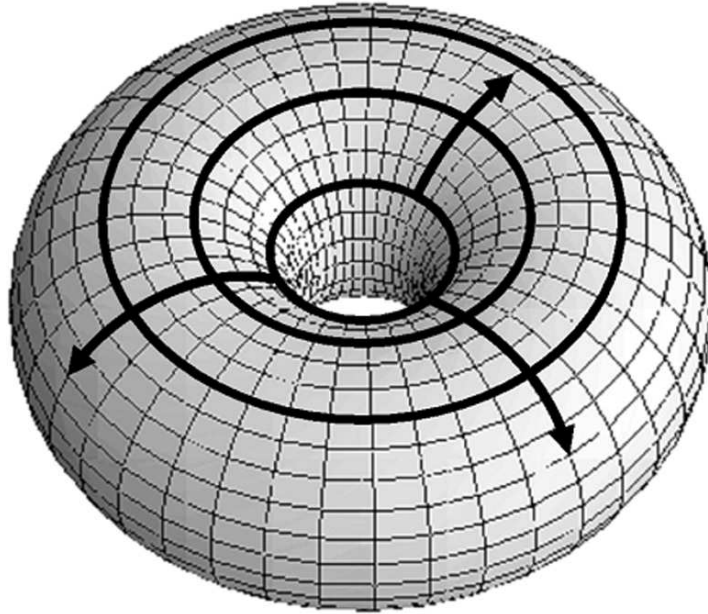


Рис. 4. Трехмерная схема пятимерного тора Гипервселенной

увеличения радиуса этой окружности V_R не будет постоянной, а будет определяться следующим уравнением:

$$V_R = U_T \sin \alpha,$$

где α – угол поворота поверхности тора (рис. 5). Эта формула не только объясняет, почему скорость расширения и будущего сжатия Вселенной непостоянна, но и описывает закон ее изменения.

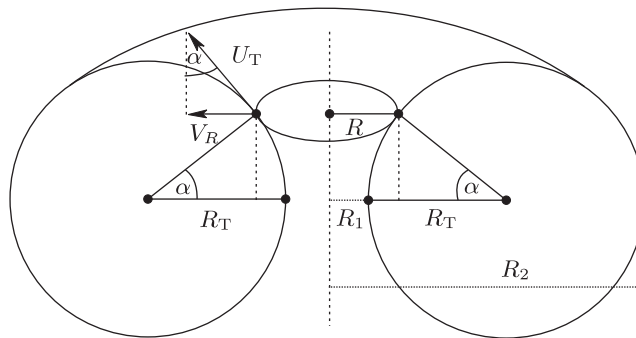


Рис. 5. Трехмерная схема пятимерного тора Гипервселенной в разрезе

Более того, если предположить, что линейная скорость вращения U_T поверхности тора Гипервселенной близка к скорости света c , то можно определить местоположение на нем нашей Вселенной в данный момент времени, зная скорость удаления от нас космических объектов, находящихся на расстоянии,

равном радиусу кривизны нашей Вселенной $R \approx 10$ млрд св. лет. Очевидно, что скорость удаления от нас таких объектов будет равна V_R – скорости увеличения R . Исходя из этого, мы можем вычислить синус угла α :

$$\sin \alpha = \frac{V_R}{U_T} \approx \frac{V_R}{c}.$$

Согласно современным астрономическим данным [1], [8]–[16] скорость удаления объектов, находящихся на расстоянии 10 млрд св. лет, составляет приблизительно $2/3$ от скорости света c . Поэтому $\sin \alpha \approx 2/3$, следовательно, $\alpha \approx 0.73$ рад $\approx 42^\circ$.

Кроме того, это означает, что за время от начала расширения Вселенной ($T \approx 14 \div 15 \times 10^9$ лет) тор Гипервселенной успел повернуться на найденный угол α при линейной скорости движения его поверхности $U_T = c$ (отметим, что $c = 1$, если измерять скорость света в единицах “световые года в год”, что в данном случае удобно). Согласно этому можно вычислить радиус тела тора R_T :

$$U_T = c = 1 = \omega_T R_T, \quad \omega_T = \frac{\alpha}{T} \Rightarrow R_T = \frac{cT}{\alpha}.$$

Таким образом, мы получили формулу для вычисления радиуса тела тора Гипервселенной в зависимости от времени T от начала расширения Вселенной и угла α , на который он успел за это время повернуться. Подставляя в эту формулу значения c , T и α , окончательно получим $R_T \approx 20$ млрд св. лет.

Теперь можно вычислить внутренний R_1 и внешний R_2 радиусы тора Гипервселенной [3]–[7] (см. рис. 5):

$$\begin{aligned} R_1 &= R - R_T(1 - \cos \alpha) \approx 4.7 \text{ (млрд св. лет)}, \\ R_2 &= R_1 + 2R_T \approx 44.7 \text{ (млрд св. лет)}. \end{aligned}$$

Как уже было отмечено выше, предлагаемая модель также объясняет, где и как могут располагаться соседние, параллельные Вселенные. Как показано на рис. 4, они могут быть представлены в виде параллельных окружностей на поверхности тора, следующих за и перед окружностью нашей Вселенной по углу α . Период обращения составляет около 125 млрд лет ($2\pi R_T/c$). Остается только вернуть редуцированные нами (для облегчения восприятия модели) две пространственные координаты, чтобы окончательно получить математическую модель нашей Гипервселенной в виде пятимерного тора с циклически двигающимися по нему параллельными Вселенными – трехмерными гиперповерхностями соответствующих четырехмерных шаров разного радиуса.

4. Математическое описание пятимерного тора Гипервселенной

Пятимерный тор Гипервселенной $T^5 \in E^5$ можно полностью определить параметрами R_1 , R_T и углом вращения $\alpha \in [0, 2\pi]$ (см. рис. 5). Для этого в четырехмерном евклидовом пространстве E^4 первых четырех координат x_1, x_2, x_3, x_4 определим гиперсферу S^3 (трехмерную гиперповерхность соответствующего четырехмерного шара) с радиусом $R(\alpha) = R_1 + R_T(1 - \cos \alpha)$ следующим образом:

$$S^3(R(\alpha)) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2(\alpha)\}.$$

Заметим, что эти гиперсферы соответствуют параллельным Вселенным на пятимерном торе Гипервселенной с радиусами кривизны, равными $R(\alpha)$ (см. рис. 4, 5).

Центры таких гиперсфер лежат в различных точках пятой координатной оси (O, x_5) пятимерного евклидова пространства E^5 в зависимости от угла вращения α . Значение пятой координаты определяется следующим образом (см. рис. 5):

$$x_5 = R_T \sin \alpha.$$

Таким образом, центр каждой из таких гиперсфер лежит в точке

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 0, R_T \sin \alpha)$$

пятимерного евклидова пространства E^5 . Множество всех таких гиперсфер для всех значений угла вращения $\alpha \in [0, 2\pi]$ образует пятимерный тор Гипервселенной, который можно определить как множество

$$T^5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2(\alpha), x_5 = R_T \sin \alpha, \alpha \in [0, 2\pi]\}$$

или описать следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} R(\alpha) &= R_1 + R_T(1 - \cos \alpha), \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= R^2(\alpha), \\ x_5 &= R_T \sin \alpha, \quad \alpha \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Отметим, что аналогичным образом можно описать тор любой размерности $N > 2$:

$$T^N = \{(x_1, \dots, x_N) \mid x_1^2 + \dots + x_{N-1}^2 = R^2(\alpha), x_N = R_T \sin \alpha, \alpha \in [0, 2\pi]\}.$$

5. Объяснение явления гравитации

В настоящее время наиболее полной и общепринятой теорией гравитации является общая теория относительности (ОТО) и некоторые ее модификации. В основе этой теории лежит предположение (утверждение), что все тела, обладающие массой, вызывают искривление пространственно-временного континуума Вселенной и все гравитационные эффекты обусловлены не силовым взаимодействием тел и полей, находящихся в пространстве-времени, а деформацией самого пространства-времени. Если гравитационная масса точно равна инерционной (на сегодняшний день это подтверждено экспериментально с точностью до 10^{-14} порядка величины), то в выражении для ускорения тела, на которое действуют лишь гравитационные силы, обе массы сокращаются. Поэтому ускорение тела (следовательно, и его траектория) не зависит от массы и внутреннего строения тела. Если все тела с различными массами, плотностями и формами в одной и той же точке пространства получают одинаковое ускорение (как это и происходит в реальности), то это ускорение можно объяснить не свойствами тел, а свойствами самого пространства в этой точке.

Таким образом, описание гравитационного взаимодействия между телами можно свести к описанию пространства-времени, в котором двигаются тела. Естественно предположить (как это делается в ОТО), что тела движутся по

инерции, т. е. так, что их ускорение в собственной системе отсчета равно нулю. Траектории тел тогда будут геодезическими линиями, теория которых была разработана математиками еще в XIX в. Если запустить из двух близких точек два тела параллельно друг другу, то в гравитационном поле они постепенно начнут либо сближаться, либо удаляться друг от друга. Этот эффект называется *девиацией геодезических линий*. Аналогичный эффект можно наблюдать непосредственно, если запустить два шарика параллельно друг другу по резиновой мембране, в центр которой положен массивный предмет. Шарик, который был ближе к предмету, продавливая мембрану, будет стремиться к центру сильнее, чем более удаленный шарик. Это расхождение (девиация) обусловлено кривизной мембраны. Аналогично, в пространстве-времени девиация геодезических линий (расхождение траекторий тел) связана с его кривизной (рис. 6). Современные эксперименты подтверждают движение тел в пространстве нашей Вселенной по геодезическим линиям с той же точностью, что и равенство гравитационной и инерционной масс.

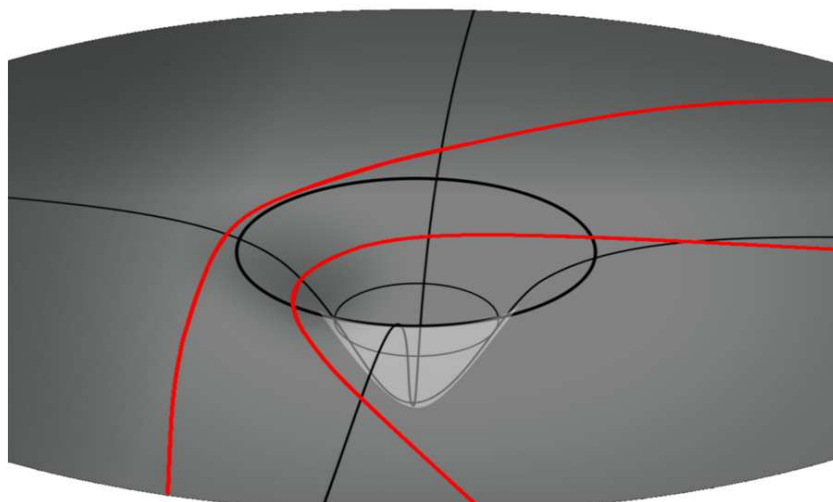


Рис. 6. Траектории тел в искривленном пространстве

В ОТО рассматривается обобщение псевдоевклидова пространства специальной теории относительности (СТО) на случай пространства, обладающего локальной кривизной, что позволяет объяснить очень многие (хотя и не все) наблюдаемые астрофизические и космологические явления и процессы [1], [8]–[17]. Однако ни ОТО, ни другие теории гравитации не дают ответ на основной вопрос: почему любое тело, обладающее массой, вызывает локальное искривление пространства и, следовательно, “притягивает” любое другое тело, обладающее массой?

Предлагаемая в настоящей работе динамическая модель Гипервселенной дает ответ на этот вопрос.

Рассмотрим любую точку в пространстве одной из параллельных Вселенных, движущихся по пятимерному тору Гипервселенной (см. рис. 4, 5). Предположим, что она не движется относительно пространства Вселенной, которой принадлежит. При этом траектория ее движения по пространству Гипервсе-

ленной будет представлять собой окружность с радиусом, равным радиусу тела тора Гипервселенной ($R_T \approx 20 \times 10^9$ св. лет). Зная величину этого радиуса и скорость движения параллельных Вселенных по тору Гипервселенной, можно вычислить центростремительное ускорение A_G данной точки:

$$A_G = \frac{c^2}{R_T} \approx 5 \times 10^{-10} \left(\frac{M}{c^2} \right).$$

Если в данной точке находится тело массы M , то на него будет действовать центробежная сила $F_G = MA_G$. Назовем ускорение A_G *абсолютным гравитационным ускорением*, а силу F_G – *абсолютной гравитационной силой* тела. Именно с этой силой данное тело “давит” на пространство Вселенной, вызывая его искривление, аналогично предмету, продавливающему мембрану (см. рис. 6).

Например, абсолютная гравитационная сила планеты Земля будет иметь следующее значение:

$$F_G = M_Z A_G \approx 3 \times 10^{15} \text{ (Н)}.$$

Чтобы оценить величину этой силы, воспользуемся классическим законом всемирного тяготения и определим максимальный радиус r_0 , до которого нужно сжать Землю, чтобы она притягивала с такой же силой предмет массы m :

$$F = \frac{GM_Z m}{r_0^2} = F_G \implies r_0 = \sqrt{\frac{GM_Z m}{F_G}} \approx \sqrt{0.1333m} \text{ (м)}.$$

Если притягиваемый предмет имеет единичную массу, то $r_0 \approx \sqrt{0.1333} \approx 0.365$ (м). Это всего лишь примерно в 40 раз больше гравитационного радиуса Земли ($r_g \approx 0.9$ см), при котором согласно ОТО начинается гравитационный коллапс. Из этой оценки можно сделать вывод, что сила давления даже таких сравнительно небольших астрономических объектов, как Земля, на пространство Вселенной достаточно велика.

Еще раз отметим, что абсолютная гравитационная сила тела вычисляется исходя из того, что это тело находится в состоянии покоя относительно пространства той Вселенной, которой оно принадлежит, либо скорость его движения в ней много меньше скорости света. При увеличении скорости тела относительно пространства его Вселенной гравитационная сила этого тела будет расти, так как к центростремительному ускорению A_G , вызванному движением всей Вселенной по тору Гипервселенной, будет добавляться центростремительное ускорение, вызванное движением этого тела по искривленному пространству самой Вселенной (см. рис. 4, 5). Добавление этого ускорения объясняет выводы СТС о релятивистском увеличении массы движущегося тела:

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Однако, как следует из представленной в этой работе модели Гипервселенной, на самом деле увеличивается не масса тела, а его гравитационная сила вследствие появления дополнительного центростремительного ускорения, что вызывает увеличение локального искривления пространства.

Важно отметить, что основным отличием пространства-времени ОТО от пространства-времени СТО является его кривизна, которая выражается тензорной величиной – тензором кривизны. В пространстве-времени СТО этот

тензор тождественно равен нулю, и пространство-время является плоским, что, вообще говоря, не верно и применимо только при слабых гравитационных полях и на малых расстояниях (хорошо подходит для ускорителей элементарных частиц). Даже в ОТО рассматривается лишь локально искривленное пространство в областях концентрации массы. Глобальная же кривизна пространства Вселенной и Гипервселенной в этих теориях практически не учитывается. Возможно, именно поэтому в рамках ОТО не могут быть объяснены некоторые явления. Например, эффект (или аномалия) “Пионера” – наблюдаемые отклонения траекторий движения различных космических аппаратов от ожидаемых (вычисленных с помощью СТО и ОТО). Эффект был обнаружен при наблюдениях за первыми космическими аппаратами (“Пионер-10” и “Пионер-11”), достигшими внешних пределов Солнечной системы (преодолевших орбиту Плутона). Оба “Пионера” замедляются под действием силы гравитации Солнца, однако при очень точном вычислении ускорения (замедления) аппаратов обнаруживается дополнительная очень слабая сила неизвестной природы, отличная от всех других известных сил, влияющих на аппараты. Данная сила вызывает постоянное ускорение аппарата в сторону Солнца, равное $(8 \pm 3) \times 10^{-10}$ (м/с²) [9]. Однако эта величина практически совпадает с вычисленным выше абсолютным гравитационным ускорением $A_G = c^2/R_T \approx 5 \times 10^{-10}$ (м/с²), чем можно объяснить эффект “Пионера”.

Таким образом, предлагаемая модель Гипервселенной позволяет объяснить связь между массой, искривлением пространства и гравитацией. Из этого следует, в частности, что если бы наша Вселенная не изменяла свой размер или делала бы это прямолинейно, а не по замкнутой траектории вдоль поверхности тора Гипервселенной, то тела, обладающие массой, не искривляли бы пространство Вселенной и, следовательно, самого явления гравитации просто не было.

6. Скорость и ускорение расширения Вселенной.

О “темной энергии”, “темной материи” и “реликтовом излучении”

Самые современные результаты астрофизических наблюдений и измерений говорят о том, что наша Вселенная не просто расширяется, а расширяется с положительным ускорением [9]–[16] (что соответствует полученному в данной работе закону для скорости циклического изменения радиуса Вселенной). Для объяснения этого факта сравнительно недавно была выдвинута гипотеза о существовании некой загадочной “темной энергии”, которая не дает гравитационным силам обычной материи замедлять скорость расширения Вселенной. Из этого, в свою очередь, делается вывод, что Вселенная будет расширяться бесконечно со все возрастающей скоростью. Однако, как видно из полученного выше закона циклического изменения скорости расширения и сужения Вселенной

$$V_R(t) = c \sin \alpha = c \sin(\omega_T t), \quad \omega_T = \frac{c}{R_T},$$

наличие в данный момент времени положительного ускорения расширения Вселенной вовсе не означает, что скорость ее расширения будет расти неограниченно. Согласно описанной в настоящей работе теории строения Гипервселенной наша Вселенная равномерно движется по замкнутой траектории вдоль поверх-

ности пятимерного тора Гипервселенной (см. рис. 4, 5), при этом скорость и ускорение ее расширения изменяются по периодическим законам, всегда оставаясь ограниченными. И никакой “темной энергии” для объяснения этого явления не нужно. Периодический закон для ускорения расширения нашей Вселенной вытекает из соответствующего закона для скорости ее расширения (увеличения ее радиуса) и имеет следующий вид:

$$A_R(t) = (V_R(t))'_t = (c \sin(\omega_T t))'_t = c \omega_T \cos(\omega_T t) = \frac{c^2}{R_T} \cos \alpha.$$

Исходя из этого закона и полученных выше значений параметров Гипервселенной, можно подсчитать примерное значение ускорения расширения Вселенной в настоящий момент времени:

$$A_{R_0} = \frac{c^2}{R_T} \cos \alpha \approx 5 \times 10^{-10} \times 0.745 = 3.725 \times 10^{-10} \left(\frac{\text{М}}{\text{с}^2} \right).$$

Это теоретически полученное значение соответствует самым современным данным астрофизических измерений [9]–[16] для расстояний, равных радиусу кривизны нашей Вселенной в настоящий момент времени (около 10 млрд св. лет). Положительное ускорение расширения Вселенной было впервые обнаружено и измерено астрофизиками С. Перлмуттером, Б. Шмидтом и А. Риссом. За это открытие в 2011 г. им была присуждена Нобелевская премия. Теоретически вычисленное по математической модели Гипервселенной [3]–[7] ускорение расширения Вселенной A_{R_0} с высокой точностью совпадает с их экспериментальными данными [10]–[12].

Уравнение для изменяющегося с течением времени радиуса нашей Вселенной $R(t)$ имеет следующий вид (см. рис. 5):

$$R(t) = R_1 + R_T(1 - \cos \alpha) = R_1 + R_T(1 - \cos(\omega_T t)).$$

Таким образом, получены законы изменения скорости, ускорения и радиуса Вселенной при ее движении по поверхности пятимерного тора Гипервселенной. При этом в каждый момент времени остается справедливым уточненный и обобщенный закон Хаббла

$$V = \frac{dD}{dt} = H_U(t)D,$$

где

$$H_U(t) = \frac{c \sin(\omega_T t)}{R_1 + R_T(1 - \cos(\omega_T t))}$$

– периодическая функция, зависящая от времени и параметров Гипервселенной и равная константе Хаббла H_0 для каждого фиксированного момента времени. Эта функция вытекает из полученных законов расширения и сжатия Вселенной для ее радиуса и скорости его изменения в зависимости от времени.

Как известно, с помощью классического закона Хаббла определяют приблизительный возраст Вселенной [11]–[16], т. е. время от начала ее расширения. При этом предполагается, что если какой-либо космический объект (например, галактика) удаляется от нас в настоящее время с некоторой скоростью, то эта скорость всегда была практически неизменной. Тогда время от начала

расширения определяется формулой $t = D/V$, а из закона Хаббла следует, что $D/V = 1/H_0$. Таким образом, измерив скорости удаления внешних галактик и экспериментально определив H_0 , можно определить время, в течение которого эти галактики разбегаются, что и будет возрастом Вселенной. Рассчитанное таким образом время от начала расширения Вселенной $T = 1/H_0$ составляет около 14 млрд лет. Еще раз отметим, что это также означает, что классическая “постоянная” Хаббла постоянна только по пространству и является функцией времени:

$$H_K = H_K(t) = \frac{1}{t}, \quad \text{где } H_0 = H_K(T).$$

На рис. 7 представлены графики “классической” функции Хаббла $H_K(t) = 1/t$ и периодической функции для уравнения Хаббла, полученной на основе представленной в настоящей работе модели Гипервселенной:

$$H_U(t) = \frac{c \sin(\omega_T t)}{R_1 + R_T(1 - \cos(\omega_T t))}.$$

Из рис. 7 ясно, что при уменьшении внутреннего радиуса тора Гипервселенной и сохранении прочих ее параметров графики функций $H_K(t)$ и $H_U(t)$ сближаются. При этом функция $H_U(t)$ всегда остается периодической и не обращается в бесконечность для любого $R_1 \neq 0$. Это позволяет рассматривать полученную в настоящей работе периодическую функцию $H_U(t)$ как уточнение и обобщение классической функции Хаббла $H_K(t)$.

Дифференцируя по $\alpha = \omega_T t$ функцию

$$H_U(\alpha) = \frac{c \sin \alpha}{R_1 + R_T(1 - \cos \alpha)},$$

находим, что она имеет локальные экстремумы при $\cos \alpha = R_T/(R_T + R_1)$. При этом функция $H_U(\alpha)$ принимает следующие минимальное и максимальное значения:

$$H_U(\alpha)_{\min} = \frac{-c}{\sqrt{R_1(R_1 + 2R_T)}}, \quad H_U(\alpha)_{\max} = \frac{c}{\sqrt{R_1(R_1 + 2R_T)}}.$$

На рис. 8 представлен график изменения размера Вселенной, соответствующий предложенной в настоящей работе модели Гипервселенной, в сравнении с графиками для ранее существовавших моделей, из которых лишь верхний пунктирный график соответствует недавно обнаруженному ускорению расширения Вселенной [10]–[16]. Попытки объяснить это явление с помощью “темной энергии” и “темной материи” приводят к выводу, что Вселенная будет расширяться бесконечно. Однако из рис. 8 видно, что график, соответствующий ускоренному расширению Вселенной, органично вписывается в циклический график (самый верхний, сплошной линией) изменения размера Вселенной, построенный по описанной здесь модели Гипервселенной, начиная с настоящего момента времени.

В качестве $D(t)$ на рис. 8 берется расстояние между любыми двумя объектами нашей Вселенной, находящимися на расстоянии, равном радиусу кривизны нашей Вселенной. Очевидно, что в этом случае $D(t) = R(t)$ для любого значения времени t . Поэтому минимальное значение функции $D(t)$ будет равно внутреннему радиусу Гипервселенной R_1 , а максимальное – внешне-

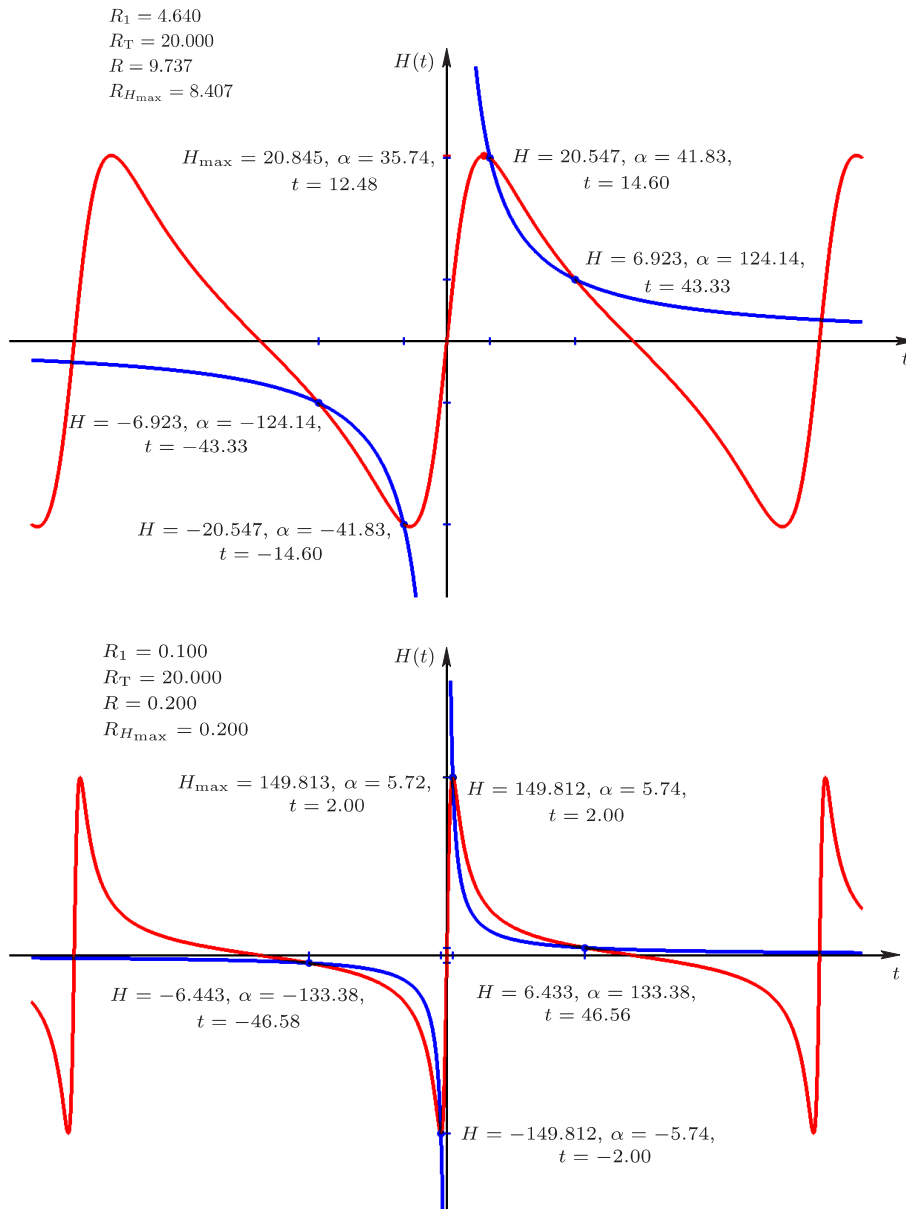


Рис. 7. График функции $H_K(t)$ при $R_1 = 4.64 \times 10^9$ лет и при $R_1 = 0.10 \times 10^9$ лет

му $R_2 = R_1 + 2R_T$. Согласно описанной модели наша Вселенная движется вместе с поверхностью тора Гипервселенной по инерции, что объясняет ее периодическое расширение и сжатие. Становится ясно, почему Вселенная не расширяется до бесконечности и не сжимается в точку. Кроме того, становится понятно, где находятся параллельные Вселенные,двигающиеся по пятимерному тору той же Гипервселенной, что и наша Вселенная, и почему они не сталкиваются друг с другом в процессе своего циклического расширения и сжатия (см. рис. 4, 5).

Длина образующей окружности пятимерного тора Гипервселенной есть $L_T = 2\pi R_T \approx 125.6$ (млрд св. лет). Существуют некоторые основания предполагать, что расстояние между соседними Вселенными, измеренное вдоль образующей окружности тора Гипервселенной, составляет около одного светового года. В этом случае общее число Вселенных, параллельных нашей и принадлежащих нашей Гипервселенной, сопоставимо с числом звезд в нашей галактике Млечный Путь – от 100 до 250 млрд.



Рис. 8. Различные сценарии расширения Вселенной в сравнении с рассчитанным по описанной модели Гипервселенной

Эта оценка помогает осознать, насколько огромна полная масса Гипервселенной, что позволяет ей совершать триллионы полных оборотов (изнутри наружу) по инерции – без необходимости воздействия каких-либо дополнительных внутренних или внешних сил. Каждый из таких оборотов (как уже отмечалось выше) длится около 125 млрд лет (см. рис. 8).

Из построенной модели Гипервселенной следует, что никакого Большого взрыва не было. Вселенная не возникла из сингулярности и никогда в нее не сожмется. Это означает, что никогда не было “горячей” и “сверхплотной” стадии развития Вселенной. Разумеется, в период сжатия Вселенной (равный примерно 62.5 млрд лет), когда красное смещение сменится фиолетовым и радиус Вселенной будет уменьшаться, ее средняя температура и плотность вещества существенно повысятся, но не до таких сверхвысоких значений, как следует из теории Большого взрыва. Главным подтверждением этой теории считается существование “реликтового излучения” (космического фонового излучения), но оно может быть объяснено совершенно другими причинами. В соответствии с теорией Гипервселенной, описанной в этой и предыдущих моих работах [2]–[7], “реликтовое излучение” является следствием собственных колебаний замкнутого трехмерного многообразия нашей Вселенной в процессе ее движения вдоль поверхности пятимерного тора Гипервселенной. Более того, существование “реликтового излучения” является еще одним подтверждением того, что скорость этого движения близка к скорости света в вакууме.

Таким образом, предложенная теория строения и динамики Гипервселенной объясняет природу “реликтового излучения”, делает ненужными искусственно введенные и до сих пор толком даже не определенные понятия “темной энергии” и “темной материи”, способные на какое-то время увести астрофизику и космологию по ложному пути. Попытки объяснить ускоренное расширение Вселенной с помощью этих понятий приводят к абсурдным и противоречивым выводам. Например, с одной стороны, “темная материя” должна обладать огромной положительной массой, в десятки раз превосходящей общую массу видимой материи Вселенной, а с другой стороны, “темная энергия” должна обладать еще более огромной отрицательной массой, чтобы расширять Вселенную с ускорением. Вместо этого в настоящей работе описаны законы периодического изменения размера, скорости и ускорения расширения (сжатия) нашей Вселенной в процессе ее циклического движения по пятимерному тору Гипервселенной.

7. О трехмерности времени

В соответствии с предложенной математической моделью, наша Вселенная прошла по поверхности тора Гипервселенной чуть меньше четверти периода расширения. Скорость расширения сейчас увеличивается, а ее максимум будет достигнут примерно через 16.5 млрд лет, затем эта скорость начнет уменьшаться и еще примерно через 31 млрд лет станет равной нулю. Радиус кривизны Вселенной тогда достигнет максимума ($R_2 \approx 44.7$ млрд св. лет), и начнется период сжатия. Он продлится около 62.5 млрд лет, в результате чего радиус Вселенной станет минимальным ($R_1 \approx 4.7$ млрд св. лет). После этого вновь начнется период расширения.

Есть основания предполагать, что Время, в котором находится пятимерный тор Гипервселенной, трехмерно, замкнуто и представляет собой трехмерную гиперповерхность четырехмерного шара Времени. Радиус кривизны этого шара в таком случае может быть равен нескольким периодам собственного вращения пятимерного тора Гипервселенной, т. е. иметь величину порядка триллиона лет [7]. Таким образом, если предположение о трехмерности Времени верно, то общая размерность пространственно-временного континуума, в котором пятимерный тор нашей Гипервселенной движется в трехмерном Времени, равна 8.

Список литературы

1. SPRINGEL V., WHITE S. D. M., JENKINS A. ET AL. *Simulating the joint evolution of quasars, galaxies and their large-scale distribution*, arXiv: astro-ph/0504097, 2015, 42 pp.
2. ХАЧАТУРОВ Р. В. *Пятимерная модель Гипервселенной и возможные этапы освоения космического пространства*. Тр. XXXV академических чтений по космонавтике, посвященных памяти С. П. Королева (Москва, январь 2011 г.). Комиссия РАН, М., 2011, 277–278.
3. ХАЧАТУРОВ Р. В. *Математическая модель Гипервселенной и ее применение для оценки возможности освоения космического пространства*. Гагаринский сбор-

- ник. Материалы XXXVIII Международных общественно-научных чтений, посвященных памяти Ю. А. Гагарина (Гагарин, 10–12 марта 2011 г.). Научная книга, Воронеж, 2011, 282–288.
4. ХАЧАТУРОВ Р. В. *Перспективы освоения космического пространства. Математическая модель Гипервселенной*. Сб. науч. статей по материалам III международной науч. конф. “Фундаментальные проблемы системной безопасности и устойчивости”, посвященной 50-летию полета первого в мире космонавта Ю. А. Гагарина. Вузовская книга, М., 2011, 499–511.
 5. ХАЧАТУРОВ Р. В. *Объяснение ускоренного расширения Вселенной и гравитации на основании математической модели Гипервселенной*. Гагаринский сборник. Материалы XXXIX Международных общественно-научных чтений, посвященных памяти Ю. А. Гагарина. Часть 2 (Гагарин, 2012 г.). Научная книга, Воронеж, 2013, 105–119.
 6. ХАЧАТУРОВ Р. В. *Прошлое и будущее нашей Вселенной с точки зрения математической модели Гипервселенной*. Гагаринский сборник. Материалы XL Международных общественно-научных чтений, посвященных памяти Ю. А. Гагарина (Гагарин, 2013 г.). Научная книга, Воронеж, 2014, 305–331.
 7. ХАЧАТУРОВ Р. В. *Пятимерный тор Гипервселенной в трехмерном Времени*. Гагаринский сборник. Материалы XLI Международных общественно-научных чтений, посвященных памяти Ю. А. Гагарина (Гагарин, 2014 г.). Научная книга, Воронеж, 2014, 352–377.
 8. WILL C. M. *The Confrontation between General Relativity and Experiment*. Living Rev. Relativity, **9** (2006), 3.
 9. ANDERSON J D., LAING P. A., LAU E. L., LIU A. S., NIETO M. M., TURYSHEV S. G. *Study of the anomalous acceleration of Pioneer 10 and 11*. Phys. Rev. D, **65**:8 (2002), 082004, 50 pp.
 10. RIESS A. G. ET AL. *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*. The Astronomical J., **116** (1998), 1009–1038.
 11. PERLMUTTER S., SCHMIDT B.P. *Measuring Cosmology with Supernovae*. Lecture Notes in Physics, **598**, Springer, Berlin, 2003, 195–217.
 12. RIESS A. G. ET AL. *A 3% Solution: Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3*. The Astrophysical J., **730**:119 (2011), 18 pp.
 13. ЧЕРНЫЙ В. Г., МАЙОРОВА В. И. *Астрономия в космонавтике*. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, М., 2008, 200 с.
 14. ЗАСОВ А. В., КОНОНОВИЧ Э. В. *Астрономия*. Физматлит, М., 2008, 256 с.
 15. ГРОМОВ А. Н., МАЛИНОВСКИЙ А. М. *Вселенная. Полная биография*. Эксмо, М., 2011, 416 с.
 16. НОВИКОВ И. Д. *Как взорвалась Вселенная*. Терра, М., 2008, 272 с.
 17. БАУРОВ Ю. А. *Бюон – шаг в будущее*. МагистрПресс, М., 2007, 160 с.

РУВЕН ВЛАДИМИРОВИЧ ХАЧАТУРОВ
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
E-mail: rv_khach@yahoo.ie

Поступило 10.06.2014

Applied Mathematics and Mathematical Physics
2015, Vol. 1, No. 1, 129–146

The Theory of Five-Dimensional Toroidal Hyperuniverse in Three-Dimensional Time

RUBEN V. KHACHATUROV

Abstract. The presented in this paper mathematical model explains the observable process of the accelerated expansion of our Universe without the aid of such concepts as “dark energy” and “dark matter”. The term “Hyperuniverse” is defined. The assumption that our Universe is an expanding (currently with acceleration) three-dimensional hypersurface of a four-dimensional ball (i.e., it is a hypersphere) with radius of about 10 billion light years and volume of about 20000 (billion light years)³, and that the Hyperuniverse is a rotating five-dimensional torus, is substantiated. The periodic laws for acceleration, speed, and value of the radius of our Universe during its motion over the surface of the five-dimensional torus of the Hyperuniverse were obtained. The phenomenon of gravitation is explained. According to the theory of Hyperuniverse, described in this paper, there was no Big Bang, the Universe did not appear from the singularity and will neither shrink into it nor expand to the infinity, but will cyclically expand and shrink during its motion along the surface of the five-dimensional torus of the Hyperuniverse.

Keywords: cosmology, astrophysics, mathematical modeling, structure of the Universe, Hyperuniverse.

MSC2010: 83Fxx



УДК 539.376

Одна оценка эволюции возмущений в нестационарных плоскопараллельных течениях Сен-Венана

Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ

Аннотация. Рассматривается развитие со временем возмущений, налагаемых на заданное нестационарное сдвиговое течение идеально жёсткопластического тела (или течение Сен-Венана) в плоском слое. На основе анализа квадратичных функционалов в H_2 и соответствующих вариационных неравенств выводится оценка роста–затухания возмущений по интегральной мере. В оценивающую функцию входит зависящая от времени верхняя грань скорости деформации основного сдвига. Введение предела текучести в модель идеальной жидкости стабилизирует течение, однако в длинноволновом пределе данная стабилизация становится сколь угодно малой.

Ключевые слова: гидродинамическая устойчивость, линеаризованная задача о собственных значениях, возмущение, течение Сен-Венана, нестационарный сдвиг, метод интегральных соотношений.

1. Линеаризованное уравнение в возмущениях

В линеаризованной теории гидродинамической устойчивости известны различные обобщения уравнения Рэлея [1]–[3], в частности уравнение [4]

$$-4\tau s^2 \left(\frac{\varphi'}{|(v^\circ)'|} \right)' = (\alpha + isv^\circ)(\varphi'' - s^2\varphi) - is(v^\circ)''\varphi, \quad 0 < x < 1, \quad (1.1)$$

описывающее эволюцию во времени возмущений, наложенных на стационарное сдвиговое течение несжимаемой идеальной жесткопластической среды, или среды Сен-Венана, в плоском слое $\{-\infty < x_1 < \infty, 0 < x_2 < 1\}$. Это течение характеризуется одномерным профилем продольной скорости $v_1^\circ(x_2) \equiv v^\circ(x)$, $v_2^\circ \equiv 0$; $\sup_{0 < x < 1} |(v^\circ)'| > 0$; $x = x_2$.

Неизвестная комплекснозначная функция $\varphi(x)$ в (1.1) связана с вещественным возмущением функции тока ψ :

$$\psi(x_1, x, t) = \varphi(x)e^{isx_1 + \alpha t}, \quad s > 0, \quad \alpha = \alpha_* + i\alpha_{**}, \quad (1.2)$$

где $s = 2\pi/l$ – волновое число, характеризующее отдельную гармонику с длиной волны l по оси x_1 ; α – комплексная частота, являющаяся спектральным

параметром. Если все ветви $\alpha_j(s)$, $j = 1, 2, \dots$, при любом $s > 0$ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости α , т. е. $\alpha_{j*}(s) < 0$, $j = 1, 2, \dots$, то течение с профилем $v^\circ(x)$ интерпретируется как устойчивое при $t > 0$ относительно малых возмущений.

В качестве спектрального параметра иногда выбирают комплексную фазовую скорость $c = i\alpha/s$. Уравнение (1.1) в этом случае можно записать следующим образом:

$$4i\tau s \left(\frac{\varphi'}{|(v^\circ)'|} \right)' = (v^\circ - c)(\varphi'' - s^2\varphi) - (v^\circ)''\varphi, \quad (1.3)$$

а условием устойчивости в терминах c будет $c_{j**}(s) < 0$, $j = 1, 2, \dots$.

Уравнение (1.1) вместе с двумя классическими однородными условиями

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad (1.4)$$

являющимися по сути требованиями непротекания среды сквозь прямолинейные границы $x = 0$ и $x = 1$, образует задачу о собственных значениях второго порядка со спектральным параметром α . Она записана в безразмерном виде, причем в размерный базис включены толщина слоя h , характерная скорость V и плотность ρ . Постоянный коэффициент τ – безразмерный предел текучести при сдвиге, равный отношению соответствующего размерного предела текучести (единственной материальной константы среды Сен-Венана) к комбинации ρV^2 . При $\tau = 0$ имеет место задача Рэлея, моделирующая эволюцию возмущений, наложенных на сдвиговое плоскопараллельное движение идеальной несжимаемой жидкости.

Обобщим описанную выше постановку линеаризованной задачи устойчивости, полагая, что невозмущенный профиль скорости $v^\circ(x, t)$ может явно зависеть от времени, т. е. исследуются стадии разгона–торможения слоя или его колебательные движения. Зависимость от t основного процесса влечет невозможность отделения подобно (1.2) множителя $e^{\alpha t}$ в возмущении $\psi(x_1, x, t)$ и образования спектрального параметра α , действительная часть которого отвечает за устойчивость.

Разделение переменных теперь следующее:

$$\psi(x_1, x, t) = \varphi(x, t)e^{isx_1}, \quad s > 0. \quad (1.5)$$

Относительно функции $\varphi(x, t)$ нетрудно вывести уравнение, аналогичное уравнению (1.1), но в частных производных:

$$-4\tau s^2 \left(\frac{\varphi_x}{|v_x^\circ|} \right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial t} + isv^\circ \right) (\varphi_{xx} - s^2\varphi) - isv_{xx}^\circ \varphi, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1.6)$$

где нижние индексы означают частное дифференцирование по соответствующим переменным. Для стационарного основного движения оператор $\partial/\partial t$ в силу (1.2) равносильен умножению на α .

2. Интегральная оценка устойчивости

Пусть в любой момент времени $t > 0$ функция φ по переменной x является элементом комплекснозначного гильбертова пространства $H_2(0; 1)$ с нормой

$$\|\varphi\|(t) = \left(\int_0^1 |\varphi(x, t)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty. \quad (2.1)$$

Умножая обе части (1.6) на $\bar{\varphi}$, интегрируя по x от 0 до 1 и учитывая граничные условия (1.4), получим

$$\begin{aligned} 4\tau s^2 \int_0^1 \frac{|\varphi_x|^2}{|v_x^\circ|} dx &= - \int_0^1 (\varphi_{xt} \bar{\varphi}_x + s^2 \varphi_t \bar{\varphi}) dx - is \int_0^1 v_x^\circ \varphi_x \bar{\varphi} dx \\ &\quad - is \int_0^1 [v_{xx}^\circ |\varphi|^2 + v^\circ (|\varphi_x|^2 + s^2 |\varphi|^2)] dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Приравняем действительные части выражений, стоящих слева и справа в уравнении (2.2). С учетом того, что

$$(\varphi_{xt} \bar{\varphi}_x)_* = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi_x|^2, \quad (\varphi_t \bar{\varphi})_* = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi|^2, \quad (2.3)$$

получим

$$\frac{d}{dt} (\|\varphi_x\|^2 + s^2 \|\varphi\|^2) = 2s \int_0^1 v_x^\circ (\varphi_x \bar{\varphi})_{**} dx - 8\tau s^2 I_v^2, \quad I_v^2 = \int_0^1 \frac{|\varphi_x|^2}{|v_x^\circ|} dx. \quad (2.4)$$

С целью вывода оценки сверху левой части (2.4) воспользуемся [5]–[7] известными неравенствами (Фридрикса, Коши–Буняковского) для квадратичных функционалов из $H_2(0; 1)$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_x\|^2 \geq \pi^2 \|\varphi\|^2 &\implies \|\varphi_x\|^2 \geq \frac{\pi^2}{\pi^2 + s^2} (\|\varphi_x\|^2 + s^2 \|\varphi\|^2), \quad I_v^2 \geq \frac{\|\varphi_x\|^2}{q}, \\ 2s \int_0^1 v_x^\circ (\varphi_x \bar{\varphi})_{**} dx &\leq 2qs \|\varphi_x\| \|\varphi\| \leq q (\|\varphi_x\|^2 + s^2 \|\varphi\|^2), \quad q = \sup_{0 < x < 1} |v_x^\circ|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5) имеем

$$\frac{d}{dt} (\|\varphi_x\|^2 + s^2 \|\varphi\|^2) \leq \left(q - \frac{8\pi^2 \tau s^2}{(\pi^2 + s^2)q} \right) (\|\varphi_x\|^2 + s^2 \|\varphi\|^2). \quad (2.6)$$

Следовательно,

$$(\|\varphi_x\|^2 + s^2 \|\varphi\|^2)(t) \leq a(t, s) (\|\varphi_x\|^2 + s^2 \|\varphi\|^2)(0), \quad (2.7)$$

$$a(t, s) = \exp \int_0^t \left(q(\xi) - \frac{8\pi^2 \tau s^2}{(\pi^2 + s^2)q(\xi)} \right) d\xi. \quad (2.8)$$

Как видно из (2.8), ключевая оценивающая в (2.7) функция a зависит как от свойств основного сдвига, так и от вида возмущения, характеризуемого волновым числом s . Наличие положительного предела текучести τ уменьшает функцию a , т. е. стабилизирует течение идеально несжимаемой жидкости. Однако в длинноволновом пределе ($s \rightarrow 0$) эта стабилизация исчезает, что следует из вида уравнений (1.1) и (1.6).

Список литературы

1. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. ИЛ, М., 1958; пер. с англ.: LIN C. C. *The theory of hydrodynamic stability*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1955.
2. БЕТЧОВ Р., КРИМИНАЛЕ В. *Вопросы гидродинамической устойчивости*. Мир, М., 1971; ВЕТСНОВ R., CRIMINALE W. O. *Stability of parallel flows*. Academic Press, London–New York, 1967.
3. ГОЛЬДШТИК М. А., ШТЕРН В. Н. *Гидродинамическая устойчивость и турбулентность*. Наука, Новосибирск, 1977.
4. ГЕОРГИЕВСКИЙ Д. В. *Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел*. УРСС, М., 1998.
5. КОЗЫРЕВ О. Р., СТЕПАНЯНЦ Ю. А. *Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости*. Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа, **25**, ВИНТИ, М., 1991, 3–89.
6. ГЕОРГИЕВСКИЙ Д. В. *Вариационные оценки и метод интегральных соотношений в задачах устойчивости*. Современная математика. Фундам. направления, **23**, ВИНТИ, М., 2007, 96–146.
7. GEORGIEVSKII D. V., MÜLLER W. H., ABALI B. E. *Generalizations of the Orr–Sommerfeld problem for the case in which the unperturbed shear motion is nonsteady*. Russian J. Math. Phys., **21:2** (2014), 189–196.

ДМИТРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ГЕОРГИЕВСКИЙ
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Поступило 27.05.2014

Applied Mathematics and Mathematical Physics
 2015, Vol. 1, No. 1, 147–150

One Estimate for Evolution of Disturbances in Nonsteady Plane-Parallel Saint-Venant Flows

D. V. GEORGIEVSKII

Abstract. An evolution by time of disturbances imposed on the given nonsteady shear flow of perfect rigid plastic solid (the Saint-Venant flow) inside a plane layer is considered. The estimate of disturbances growth or decay by integral measure is derived on the basis of analysis of quadratic functionals in H_2 and the corresponding variational inequalities. The estimating function involves the upper bound of strain rate in the nonperturbed shear which depends on time. Taking account of yield stress in the model of ideal liquid stabilizes a flow but this stabilization becomes arbitrarily small for long wavelength limit.

Keywords: hydrodynamic stability, linearized eigenvalue problem, disturbance, the Saint-Venant flow, nonsteady shear, the method of integral relations.

MSC2010: 76E05



УДК 517.95

О решениях смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения во внешних областях

О. А. МАТЕВОСЯН

Аннотация. Изучаются вопросы единственности решений смешанной краевой задачи Дирихле–Навье для бигармонического уравнения в неограниченных областях в предположении, что обобщенное решение этой задачи обладает конечным интегралом Дирихле с весом $|x|^a$. В зависимости от значения параметра a доказаны теоремы единственности, а также найдены точные формулы для вычисления размерности пространства решений смешанной краевой задачи во внешних областях.

Ключевые слова: бигармонический оператор, весовой интеграл Дирихле, размерность пространства.

1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – неограниченная область, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ с границей $\partial\Omega \in C^1$, где G – ограниченная односвязная область (или объединение конечного числа таких областей) в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ – замыкание Ω , $x = (x_1, \dots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

В области Ω рассматривается смешанная краевая задача для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x) = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями Дирихле–Навье

$$u(x)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta u(x)|_{\Gamma_2} = 0, \quad (2)$$

где $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\text{mes}_{n-1}\Gamma_1 \neq 0$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Как известно, в случае, когда Ω – неограниченная область, следует дополнительно охарактеризовать поведение решения на бесконечности. Как правило, для этой цели служит либо условие конечности интервала Дирихле (энергии), либо условие, налагаемое на характер убывания модуля решения при $|x| \rightarrow \infty$.

Подобного рода условия на бесконечности являются естественными и изучались рядом авторов (см., например, [1]–[4]).

Вопросы о поведении при $|x| \rightarrow \infty$ решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения системы уравнений Навье–Стокса и системы Кармана рассматривались в работах [5]–[7], где при определенных условиях геометрического характера для границы области получены также оценки, характеризующие поведение $|u(x)|$ и $|\nabla u(x)|$ при $|x| \rightarrow \infty$. Поведение решения смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения в окрестности бесконечности изучено в работе [8].

В настоящей работе таким условием является ограниченность следующего интеграла Дирихле с весом:

$$D_a(u(x), \Omega) \equiv \int_{\Omega} |x|^a \sum_{|\alpha|=2} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx < \infty, \quad a \in \mathbb{R}^1.$$

В разных классах неограниченных областей с конечным весовым интегралом энергии (Дирихле) автором в работах [9]–[13] изучены вопросы единственности и найдены размерности пространств решений краевых задач для системы теории упругости и бигармонического (полигармонического) уравнения.

В работе [4] при условии конечности интеграла Дирихле для поведения решения на бесконечности изучены аналогичные вопросы решений краевых задач для эллиптических систем высокого порядка в неограниченных областях.

Развивая подход, основанный на использовании неравенств типа Харди (см. [2]–[4]), мы получили в данной работе критерий единственности решения смешанной задачи для бигармонического уравнения.

Для построения решения используется вариационный метод, т. е. минимизируется соответствующий функционал в классе допустимых функций.

Введем следующие обозначения: $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций в области Ω , имеющих компактный носитель в Ω ; $H^2(\Omega, \Gamma)$, $\Gamma \subset \bar{\Omega}$, – пространство, полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\bar{\Omega})$, равных нулю в окрестности Γ , по норме

$$\|u(x); H^2(\Omega, \Gamma)\| = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 2} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

где $\partial^\alpha \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, α_j – целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; если $\Gamma = \emptyset$, то пространство $H^2(\Omega, \Gamma)$ будем обозначать $H^2(\Omega)$.

Далее, $\dot{H}^2(\Omega)$ – пространство функций в Ω , полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства Соболева $H^2(\Omega)$; $\dot{H}_{loc}^2(\Omega)$ – пространство функций в Ω , полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ в системе полунорм $\|u(x); H^2(G_0)\|$, где $G_0 \subset \bar{\Omega}$ – произвольный компакт.

Обозначим

$$D(u(x), \Omega) = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx, \quad D_a(u(x), \Omega) = \int_{\Omega} |x|^a \sum_{|\alpha|=2} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx,$$

$$\Omega_R = \Omega \cap \{x: |x| < R\}, \quad \partial\Omega_R = \partial\Omega \cup \{x: |x| = R\}.$$

Под конусом K в \mathbb{R}^n с вершиной в начале координат будем понимать такую область, что если $x \in K$, то $\lambda x \in K$ при всех $\lambda > 0$. Будем считать, что начало координат $x_0 = 0$ находится вне $\bar{\Omega}$.

2. Вспомогательные утверждения

Определение 1. Решением однородного бигармонического уравнения (1) в Ω будем называть функцию $u(x) \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ такую, что для всякой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \Delta \varphi(x) dx = 0.$$

Сначала докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (1) в Ω , удовлетворяющее условию $D_a(u(x), \Omega) < \infty$. Тогда

$$u(x) = P(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord } P(x) < m_0 = \max\{2, 2 - n/2 - a/2\}$, $\beta_0 = 2 - n/2 + a/2$, $\Gamma(x)$ – фундаментальное решение уравнения (1), $C_\alpha = \text{const}$, $\beta \geq 0$ – целое число, а для функции $u^\beta(x)$ справедлива оценка

$$|\partial^\gamma u^\beta(x)| \leq C_{\gamma\beta} |x|^{3-n-\beta-|\gamma|}, \quad C_{\gamma\beta} = \text{const},$$

для любого мультииндекса γ .

Замечание. Для фундаментального решения $\Gamma(x)$ бигармонического уравнения известно [14], что

$$\Gamma(x) = \begin{cases} C|x|^{4-n}, & \text{если } 4 - n < 0 \text{ или } n \text{ нечетно,} \\ C|x|^{4-n} \ln |x|, & \text{если } 4 - n \geq 0 \text{ и } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Доказательство леммы. Рассмотрим функцию $v(x) = \theta_N(x)u(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(|x|/N)$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \leq 1$, $\theta(s) = 1$ при $s \geq 2$, причем $N \gg 1$ и $G \subset \{x: |x| < N\}$. Продолжим $v(x)$ на \mathbb{R}^n , полагая $v(x) = 0$ на $G = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Тогда функция $v(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 v(x) = f,$$

где $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp } f \subset \{x: |x| < 2N\}$. Легко видеть, что $D_a(v(x), \mathbb{R}^n) < \infty$.

Теперь мы можем использовать теорему 1 из [15], поскольку она основывается на лемме 2 из [15], в которой нет никаких ограничений на знак σ . Следовательно, разложение

$$v(x) = P(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x)$$

справедливо для любого параметра a , где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord } P(x) < m_0 = \max\{2, 2 - n/2 - a/2\}$, $\beta_0 = 2 - n/2 + a/2$, $C_\alpha = \text{const}$ и

$$|\partial^\gamma v^\beta(x)| \leq C_{\gamma\beta} |x|^{3-n-\beta-|\gamma|}, \quad C_{\gamma\beta} = \text{const}.$$

Отсюда и из определения функции $v(x)$ следует равенство (3). Лемма доказана.

3. Основные результаты

Определение 2. Решением однородной задачи Дирихле–Навье для уравнения (1) с условиями (2) будем называть функцию $u(x) \in H^2(\omega, \Gamma_1 \cap \partial\omega)$ для любой ограниченной области $\omega \subset \Omega$, при этом для всякой функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \nu} = 0$ на Γ_1 , выполнено интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \Delta \varphi(x) dx = 0. \quad (4)$$

Теорема 1. Смешанная задача Дирихле–Навье для бигармонического уравнения (1) с граничными условиями (2) и с условием $D(u(x), \Omega) < \infty$ имеет $n + 1$ линейно независимых решений.

Доказательство. Для любого ненулевого вектора A из \mathbb{R}^n построим обобщенное решение $u_A(x)$ бигармонического уравнения (1) с граничными условиями

$$u_A(x)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = (Ax)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}, \quad \frac{\partial u_A(x)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial (Ax)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1}, \quad \Delta u_A(x)|_{\Gamma_2} = 0, \quad (5)$$

и условием

$$\chi(u_A(x), \Omega) \equiv \begin{cases} \int_{\Omega} \left(\frac{|u_A(x)|^2}{|x|^4} + \frac{|\nabla u_A(x)|^2}{|x|^2} + |\nabla \nabla u_A(x)|^2 \right) dx < \infty & \text{при } n = 3 \text{ и } n > 4, \\ \int_{\Omega} \left(\frac{|u_A(x)|^2}{||x|^2 \ln |x||^2} + \frac{|\nabla u_A(x)|^2}{||x| \ln |x||^2} + |\nabla \nabla u_A(x)|^2 \right) dx < \infty & \text{при } n = 2, 4. \end{cases} \quad (6)$$

Такое решение задачи (1), (5) можно построить вариационным методом, минимизируя функционал

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta v(x)|^2 dx$$

в классе допустимых функций $\{v(x): v(x) \in H^2(\Omega), v(x)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = (Ax)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2}, \frac{\partial v(x)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = \frac{\partial (Ax)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1}, \Delta v(x)|_{\Gamma_2} = 0, v(x) \text{ имеет компактный носитель в } \overline{\Omega}\}$.

Справедливость условия (6), как следствие неравенства Харди, вытекает из результатов работ [2]–[4].

Теперь для произвольного числа $e \neq 0$ построим обобщенное решение $u_e(x)$ уравнения (1) с граничными условиями

$$u_e(x)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = e, \quad \frac{\partial u_e(x)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta u_e(x)|_{\Gamma_2} = 0 \quad (7)$$

и с условием

$$\chi(u_A(x), \Omega) \equiv \begin{cases} \int_{\Omega} \left(\frac{|u_e(x)|^2}{|x|^4} + \frac{|\nabla u_e(x)|^2}{|x|^2} + |\nabla \nabla u_e(x)|^2 \right) dx < \infty & \text{при } n = 3 \text{ и } n > 4, \\ \int_{\Omega} \left(\frac{|u_e(x)|^2}{||x|^2 \ln |x||^2} + \frac{|\nabla u_e(x)|^2}{||x| \ln |x||^2} + |\nabla \nabla u_e(x)|^2 \right) dx < \infty & \text{при } n = 2, 4. \end{cases} \quad (8)$$

Решение задачи (1), (7) также строим вариационным методом, минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций $\{v(x): v(x) \in H^2(\Omega), v(x)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = e, \frac{\partial v(x)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = 0, \Delta v(x)|_{\Gamma_2} = 0, v(x) \text{ имеет компактный носитель в } \overline{\Omega}\}$.

Условие (8), как следствие неравенства Харди, вытекает из результатов работ [2]–[4].

Рассмотрим функцию

$$v(x) = (u_A(x) - Ax) - (u_e(x) - e).$$

Очевидно, что $v(x)$ – решение задачи (1), (2):

$$\Delta v(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad v(x)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial v(x)}{\partial \nu}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta v(x)|_{\Gamma_2} = 0.$$

Легко заметить, что $v(x) \not\equiv 0$ и $D(v(x), \Omega) < \infty$.

Таким образом, каждому ненулевому вектору $\mathbf{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ из \mathbb{R}^{n+1} отвечает ненулевое решение $v_{\mathbf{A}}(x) = \{v_{A_0}(x), v_{A_1}(x), \dots, v_{A_n}(x)\}$ задачи (1), (2) с условием

$$D(v_{\mathbf{A}}(x), \Omega) < \infty,$$

причем

$$v_{\mathbf{A}}(x) = u_A(x) - u_e(x) - Ax + e.$$

Пусть $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ – базис в \mathbb{R}^{n+1} . Докажем, что соответствующие решения $v_{A_0}(x), v_{A_1}(x), \dots, v_{A_n}(x)$ линейно независимы. Пусть

$$\sum_{i=0}^n C_i v_{A_i}(x) \equiv 0, \quad C_i = \text{const}.$$

Положим $W(x) \equiv \sum_{i=1}^n C_i A_i x - C_0 e$. Имеем

$$\begin{aligned} W(x) &= \sum_{i=1}^n C_i u_{A_i}(x) - C_0 u_e(x), \\ \int_{\Omega} |x|^{-2} |\nabla W(x)|^2 dx &< \infty, \quad n > 4, \\ \int_{\Omega} ||x| \ln |x||^{-2} |\nabla W(x)|^2 dx &< \infty, \quad 2 \leq n \leq 4. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$W(x) \equiv \sum_{i=1}^n C_i A_i x - C_0 e \equiv 0.$$

Пусть $T = \sum_{i=0}^n C_i A_i = (t_0, \dots, t_n)$, где $A_0 = -e$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x|^{-2} |\nabla W(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} |x|^{-2} (t_1^2 + \dots + t_n^2) dx = \infty, \quad n > 4, \\ \int_{\Omega} ||x| \ln |x||^{-2} |\nabla W(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} ||x| \ln |x||^{-2} (t_1^2 + \dots + t_n^2) dx = \infty, \quad 2 \leq n \leq 4, \end{aligned}$$

если $T \neq 0$. Следовательно, $T = \sum_{i=0}^n C_i A_i = 0$, откуда в силу линейной независимости векторов A_0, A_1, \dots, A_n получим $C_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Таким образом, задача Дирихле–Навье (1), (2) с условием $D(u(x), \Omega) < \infty$ имеет по крайней мере $n + 1$ линейно независимых решений.

Докажем, что любое решение $u(x)$ задачи (1), (2) с условием $D(u(x), \Omega) < \infty$ представляется в виде линейной комбинации функций $v_{A_0}(x), v_{A_1}(x), \dots, v_{A_n}(x)$, т. е.

$$u(x) = \sum_{i=0}^n C_i v_{A_i}(x), \quad C_i = \text{const}.$$

Поскольку набор векторов $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ – базис в \mathbb{R}^{n+1} , существуют константы C_0, C_1, \dots, C_n такие, что

$$A = \sum_{i=0}^n C_i A_i.$$

Положим

$$u_0(x) \equiv u(x) - \sum_{i=0}^n C_i v_{A_i}(x).$$

Очевидно, что функция $u_0(x)$ является решением задачи (1), (2), $D(u_0(x), \Omega) < \infty$ и $\chi(u_0(x), \Omega) < \infty$.

Докажем, что $u_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Для этого, подставляя в интегральное тождество (4) для функции $u_0(x)$ функцию $\varphi(x) = u_0(x)\theta_N(x)$, где $\theta_N(x) = \theta\left(\frac{|x|}{N}\right)$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \geq 2$, $\theta(s) = 1$ при $s \leq 1$, получим

$$\int_{\Omega} (\Delta u_0(x))^2 \theta_N(x) dx = -J_1(u_0) - J_2(u_0), \quad (9)$$

где

$$J_1(u_0) = 2 \int_{\Omega} \Delta u_0(x) \nabla u_0(x) \nabla \theta_N(x) dx, \quad J_2(u_0) = \int_{\Omega} \Delta u_0(x) u_0(x) \Delta \theta_N(x) dx.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского и учитывая условия $D(u_0(x), \Omega) < \infty$, $\chi(u_0(x), \Omega) < \infty$, легко показать, что $J_1(u_0) \rightarrow 0$ и $J_2(u_0) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Следовательно, переходя к пределу в (9) при $N \rightarrow \infty$, получим

$$\int_{\Omega} (\Delta u_0(x))^2 dx = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\Delta u_0(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_0(x) |_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} |_{\Gamma_1} = 0, \quad \Delta u_0(x) |_{\Gamma_2} = 0.$$

Отсюда следует (см. [16]), что $u_0(x) \equiv 0$ в Ω . Теорема доказана.

Теорема 2. *Задача Дирихле–Навье (1), (2) с условием $D_a(u(x), \Omega) < \infty$ имеет:*

- (i) $n + 1$ линейно независимых решений, если $-n \leq a < n - 4$;
- (ii) n линейно независимых решений, если $n - 4 \leq a < n - 2$;
- (iii) лишь тривиальное решение, если $n - 2 \leq a < \infty$.

Доказательство теоремы 2 основано на лемме об асимптотическом представлении решений бигармонического уравнения и неравенствах типа Харди для неограниченных областей [2]–[4].

Теорема 3. *Задача Дирихле–Навье (1), (2) с условием $D_a(u(x), \Omega) < \infty$ имеет $k(r, n)$ линейно независимых решений при $-2r + 2 - n \leq a < -2r + 4 - n$, $r > 1$, где*

$$k(r, n) = \frac{(r+n)!}{n!r!} - \frac{(r+n-4)!}{n!(r-4)!}.$$

Для доказательства теоремы 3 необходимо определить число линейно независимых решений бигармонического уравнения (1), степени которых не превосходят заданного числа.

Известно, что размерность всех многочленов в \mathbb{R}^n степени не выше r равна $\frac{(r+n)!}{r!n!}$ [17]. Тогда размерность всех бигармонических многочленов в \mathbb{R}^n степени не выше r равна

$$\frac{(r+n)!}{r!n!} - \frac{(r-4+n)!}{(r-4)!n!},$$

так как бигармоническое уравнение представляет собой равенство нулю некоторого многочлена степени $r-4$ в \mathbb{R}^n . Если через $k(r, n)$ обозначим число линейно независимых полиномиальных решений уравнения (1), степени которых не превосходят r , а через $l(r, n)$ – число линейно независимых однородных многочленов степени r , являющихся решениями уравнения (1), то

$$k(r, n) = \sum_{s=0}^r l(s, n),$$

где

$$l(s, n) = \frac{(s+n-1)!}{(n-1)!s!} - \frac{(s+n-5)!}{(n-1)!(s-4)!}, \quad s > 0.$$

Далее, доказывается, что смешанная задача Дирихле–Навье (1), (2) с условием $D_a(u(x), \Omega) < \infty$ при $-2r+2-n \leq a < -2r+4-n$ имеет $k(r, n)$ линейно независимых решений.

Список литературы

1. КУДРЯВЦЕВ Л. Д. *Решение первой краевой задачи для самосопряженных и эллиптических уравнений в случае неограниченных областей*. Изв. АН СССР. Сер. матем., **31**:5 (1967), 354–366; англ. пер.: KUDRYAVTSEV L. D. *The solution of the first boundary value problem for self-adjoint elliptic equations in the case of unbounded region*. Math. USSR-Izv., **1**:5 (1967), 1131–1151.
2. КОНДРАТЬЕВ В. А., ОЛЕЙНИК О. А. *Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна*. УМН, **43**:5(263) (1988), 55–98; англ. пер.: KONDRAT'EV V. A., OLEINIK O. A. *Boundary-value problems for the system of elasticity theory in unbounded domains. Korn's inequalities*. Russian Math. Surveys, **43**:5 (1988), 65–119.
3. KONDRATIEV V. A., OLEINIK O. A. *Hardy's and Korn's inequality and their application*. Rend. Mat. Appl. Serie VII, **10** (1990), 641–666.
4. КОНЬКОВ А. А. *О размерности пространства решений эллиптических систем в неограниченных областях*. Матем. сб., **184**:12 (1993), 23–52; англ. пер.: KON'KOV A. A. *On the dimension of the solution space of elliptic systems in unbounded domains*. Russian Acad. Sci. Sb. Math., **80**:2 (1995), 411–434.
5. ОЛЕЙНИК О. А., КОНДРАТЬЕВ В. А., КОПАЧЕК И. *Об асимптотических свойствах решений бигармонического уравнения*. Дифференц. уравнения, **17**:10 (1981), 1886–1899.
6. KONDRATIEV V. A., OLEINIK O. A. *Estimates for solutions of the Dirichlet problem for biharmonic equation in a neighbourhood of an irregular boundary point and in a neighbourhood of infinity Saint-Venant's principle*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **93**:3–4 (1983), 327–343.
7. ЧИЧОЯН С. Ф. *О поведении обобщенных решений задачи Дирихле для системы Навье–Стокса и системы Кармана в окрестности бесконечно удаленной точки*. УМН, **41**:2(248) (1986), 211–212; англ. пер.: CHICHONYAN S. F. *On the behaviour*

- of generalized solutions of the Dirichlet problem for the Navier-Stokes system and the von Karman system in a neighbourhood of the point at infinity.* Russian Math. Surveys, **41:2** (1986), 193–194.
8. ЛЕКВЕИШВИЛИ Д. М. *О поведении обобщенных решений смешанной задачи для бигармонического уравнения в окрестности бесконечности.* Дифференц. уравнения и их прилож. Изд-во Моск. ун-та, М., 1984, 81–85.
 9. МАТЕВОСЯН О. А. *О единственности решения смешанной задачи для системы теории упругости в неограниченных областях.* Совместные заседания семинара им. И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики и ММО (16-я сессия, 18–21 января 1994 г.). УМН, **49:4**(298) (1994), 129–130; англ. пер.: МАТЕВОСЯН О. А. *On uniqueness of solutions of the mixed boundary value problem for the system of elasticity theory in unbounded domains: Joint sessions of the Petrovskii Seminar on Differential Equations and Mathematical Problems of Physics and of the Moscow Mathematical Society (16th session, 18–21 January, 1994).* Russian Math. Surveys, **49**:(4) (1994), 193–194.
 10. МАТЕВОСЯН О. А. *О решениях краевых задач для системы теории упругости и бигармонического уравнения в полупространстве.* Дифференц. уравнения, **34:6** (1998), 806–811; англ. пер.: МАТЕВОСЯН О. А. *On solutions of boundary value problems for a system in the theory of elasticity and for the biharmonic equation in a half-space.* Differential Equations, **34:6** (1998), 803–808.
 11. МАТЕВОСЯН О. А. *О решениях внешней задачи Дирихле для бигармонического уравнения с конечным весовым интегралом Дирихле.* Матем. заметки, **70:3** (2001), 403–418; МАТЕВОСЯН О. А. *The Exterior Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation: Solutions with Bounded Dirichlet Integral.* Math. Notes, **70:3** (2001), 363–377.
 12. МАТЕВОСЯН О. А. *О решениях смешанных краевых задач для системы теории упругости в неограниченных областях.* Изв. РАН. Сер. матем., **67:5** (2003), 49–82; англ. пер.: МАТЕВОСЯН О. А. *On solutions of mixed boundary-value problems for the elasticity system in unbounded domains.* Izv. Math., **67:5** (2003), 895–929.
 13. МАТЕВОСЯН О. А. *On solutions of one boundary value problem for the polyharmonic equation in unbounded domains.* Russian J. Math. Phys., **21:1** (2014), 130–132.
 14. СОБОЛЕВ С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Наука, М., 1988; англ. пер.: SOBOLEV S. L. *Some applications of functional analysis in mathematical physics.* AMS, Providence, RI, 1991.
 15. KONDRATIEV V. A., OLEINIK O. A. *On the behavior at infinity of solutions of elliptic systems with a finite energy integral.* Arch. Ration. Mech. Anal., **99:1** (1987), 75–99.
 16. ГИЛБАРГ Д., ТРУДИНГЕР Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* Наука, М., 1989; пер. с англ.: GILBARG D., TRUDINGER N. *Elliptic partial differential equations of second order,* Springer-Verlag, Berlin, 1977.
 17. МИХЛИН С. Г. *Линейные уравнения в частных производных.* Высшая школа, М., 1977.

Овик А. МАТЕВОСЯН

Поступило 15.07.2014

Высшая школа науки: НИЛ “Фундаментальная и прикладная математика”;

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: hmatevossian@graduate.org

Applied Mathematics and Mathematical Physics
2015, Vol. 1, No. 1, 151–160

On Solutions of the Mixed Boundary Value Problem for the Biharmonic Equation in Exterior Domains

HOVIK A. MATEVOSSIAN

Abstract. We study the uniqueness problems for solutions of the mixed Dirichlet–Navier boundary value problem for the biharmonic equation in unbounded domains under the assumption that a generalized solution of this problem has a bounded Dirichlet integral with weight $|x|^a$. Depending on the value of the parameter a , we prove uniqueness theorem and also present precise formulas to evaluate the dimension of the space of solutions of the mixed boundary value problem in the exterior of a compact set.

Keywords: biharmonic operator, weighted Dirichlet integral, dimension of the space.

MSC2010: 35G15, 35J35, 35J40

СОДЕРЖАНИЕ

Математическая физика

ВАСИЛЬЕВ В. Б. Псевдодифференциальные уравнения, сингулярные интегралы и распределения	3–16
ПОКРОВСКИЙ А. В. Об устранимости множеств уровня для субгармонических функций	17–26

Прикладная математика

АТАНАСКОВИЋ ТЕОДОР М., ПИЛІПОВИЋ СТЕВАН, ЗОРИЇА ДУЅАН. On a System of Equations Arising in Viscoelasticity Theory of Fractional Type	27–46
БАЙКОВ А. Ю. Метод макрошагов для глобальной многопараметрической оптимизации мощных клистронов	47–66
ВЕСТЯК В. А., ФЕДОТЕНКОВ Г. В. Алгоритм численного обращения преобразования Лапласа в классе обобщенных функций, образующих алгебру со сверткой	67–76
ЛЕМАЙТРЕ ГЕРАРД R. Elasticity Theory of Thin Plates and Active Optics. Solutions for Generating Toroid Surfaces with Vase Forms....	77–100
НИКАБАДЗЕ М. У. Некоторые варианты уравнений микрополярных теорий оболочек	101–118

Геометрия и топология

МАЙМОНЕ АНЖЕЛО, НОРДО ГИОРГИО. 0-Gaps on 3D Digital Curves	119–128
ХАЧАТУРОВ Р. В. Теория пятимерной тороидальной Гипервселенной	129–146

Краткие сообщения

ГЕОРГИЕВСКИЙ Д. В. Одна оценка эволюции возмущений в нестационарных плоскопараллельных течениях Сен-Венана	147–150
МАТЕВОСЯН О. А. О решениях смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения во внешних областях	151–160

CONTENTS

Mathematical Physics

- VASILYEV V. B. Pseudo Differential Equations, Singular Integrals, and Distributions 3–16
- POKROVSKII A. V. On the Removability of Level Sets for Subharmonic Functions..... 17–26

Applied Mathematics

- ATANACKOVIĆ TEODOR M., PILIPOVIĆ STEVAN, ZORIČA DUŠAN. On a System of Equations Arising in Viscoelasticity Theory of Fractional Type 27–46
- БАЙКОВ А. Ю. Method of Macrosteps for Multiple Parameter Global Optimization of Powerful Klystrons..... 47–66
- VESTYAK V. A., FEDOTENKOV G. V. Algorithm for the Numerical Laplace Transform Inversion in the Class of Generalized Functions Forming an Algebra with Convolution 67–76
- LEMAITRE GÉRARD R. Elasticity Theory of Thin Plates and Active Optics. Solutions for Generating Toroid Surfaces with Vase Forms.... 77–100
- NIKABADZE M. U. Some variants of micropolar shell theory equations 101–118

Geometry and Topology

- MAIMONE A., NORDO G. 0-Gaps on 3D Digital Curves..... 119–128
- КНАЧАТУРОВ РУБЕН В. The Theory of Five-Dimensional Toroidal Hyperuniverse in Three-Dimensional Time..... 129–146

Short Communications

- GEORGIEVSKII D. V. One Estimate for Evolution of Disturbances in Nonsteady Plane-Parallel Saint-Venant Flows..... 147–150
- MATEVOSSIAN HOVIK A. On Solutions of the Mixed Boundary Value Problem for the Biharmonic Equation in Exterior Domains..... 151–160

Научный редактор Н. И. Воронина

Сдано в набор 06.12.2014 Подписано к печати 27.02.2015
Формат $70 \times 100 \frac{1}{16}$ Печать цифровая
Усл.печ.л. 13.0 Усл.кр.отт. 3.3 тыс. Уч.изд.л. 12.0 Бум.л. 5.0
Тираж 250 экз. Заказ Цена свободная

УчРЕДИТЕЛЬ: Московский финансово-юридический университет МФЮА
(Протокол заседания Ученого совета МФЮА № 2-3/1 от 19.02.2013 г.)
Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-54516 от 21.06.2013 г.
Адрес редакции: 117342, г. Москва, ул. Введенского, 1А, тел. (499) 979-0099
<http://schoolofscience.mfua.ru>

Отпечатано в ППП «Типография “Наука”», 121099, Москва, Шубинский пер., 6



Московский
финансово-юридический
университет МФЮА

25 лет

Колледж МФЮА

Высшее
образование

Бакалавриат

Прикладная математика
Информационные системы и технологии
Информатика и вычислительная техника
Реклама и связи с общественностью
Государственное и муниципальное управление
Землеустройство и кадастры
Экономическая безопасность
Бизнес-информатика
Экономика
Менеджмент
Юриспруденция
Журналистика
Таможенное дело

Магистратура

Специалитет

МВА

Аспирантура

Государственный диплом

Прием переводом из других вузов

Обучение на двух
и более специальностях одновременно

*Качество образования –
качество жизни!*

www.mfua.ru

(495) 221-10-01

Бессрочная лицензия 90/01. №0008398 от 23.04.2015г.
Госрегистрация 90/01 №0001392 от 01.06.2015г.

